第三章、随机变量与分布函数

§3.1 随机变量及其分布

- 函数、完全反像.

$$X:\quad \Omega \to \mathbb{R},$$

$$X^{-1}(D) = \{\omega : X(\omega) \in D\} = \{X \in D\}, \quad \forall D \subseteq \mathbb{R}.$$

- 设$\mathcal{F}$ 是Ω 上的σ 代数. 若$X : \Omega \to \mathbb{R}$ 满足

$$\{X \leqslant x\} \in \mathcal{F}, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

则称X 为一个随机变量(random variable). (定义3.1.1)

- X 生成的σ 代数:

$$\sigma(X) := \sigma\left(\{\{X \leqslant x\} : x \in \mathbb{R}\}\right) = \{\{X \in B\}, \forall B \in \mathcal{B}\}.$$

- X 是随机变量iff $\sigma(X) \subseteq \mathcal{F}$.

- 谈及随机变量时，只需要$(\Omega,\mathcal{F})$，不需要P.
- 概率P、随机变量X.

	含义	定义域	自变量	要求
P	权重	$\mathcal{F}$	事件A	三条
X	观测值	Ω	样本ω	$\{X\leqslant x\}\in\mathcal{F}$

- 分布(distribution, law) μ: $(\mathbb{R},\mathcal{B})$ 上的概率.

  随机变量X 的分布μ_X, $\mathcal{L}(X)$:

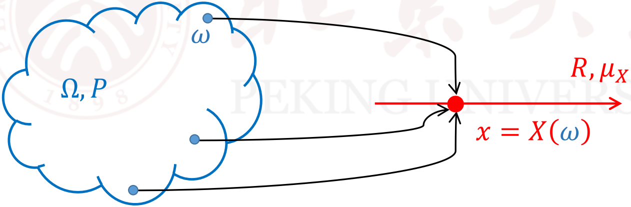
$$B\mapsto P(X\in B)=P\big(\{X\in B\}\big),\ \forall B\in\mathcal{B}.$$

- 顺序:

$$\Omega\to\mathcal{F}\to\begin{matrix}\nearrow & P & \searrow \\ \searrow & X & \nearrow\end{matrix}\to\mu_X.$$

- 随机变量:

抽象	Ω: 集合	$\mathcal{F}$: σ 代数	ω: 符号	P: 概率
具体	$\mathbb{R}$: 实轴	$\mathcal{B}$: 区间生成	x: 实数	μ_X: 分布



离散型分布: 分布列.

- 分布列,

$$\mu(\{x_k\}) = p_k, \quad k = 1, 2, \cdots,$$

其中, $x_1, x_2, \cdots$ 互不相等; $p_k \geqslant 0, \forall k; \sum_k p_k = 1.$

- 离散型随机变量X:

$$P(X = x_i) = p_i, \quad \forall i.$$

- 单点分布(退化分布): $P(X=c)=1$.
- 伯努利(Bernoulli)分布, $X \sim B(1,p)$:

$$P(X=1)=p,\ \ P(X=0)=q=1-p.$$

- 示性函数 1_A (index function):

$$1_A(\omega)=1, \forall \omega \in A; \quad 1_A(\omega)=0, \forall \omega \notin A.$$

- $X \sim B(1,p)$, $A=\{X=1\}$, $B=\{X=0\} \subseteq A^c$ 则

$$P(X=1_A)=1. \quad \text{记为} X \overset{\text{a.s.}}{=} 1_A, \text{简记} X=1_A.$$

- $X=Y$ 指$P(X=Y)=1$; $X \geqslant 0$ 指$P(X \geqslant 0)=1$.
- 两点分布:

$$P(X=a)=p,\ P(X=b)=q,\ a \neq b.$$

- 二项(Binomial)分布, $X \sim B(n,p)$:

$$P(X=k) = C_n^k p^k q^{n-k} =: b(k;n,p), \quad k=0,1,\cdots,n.$$

- 超几何(Hypergeometric)分布, $X \sim H(N,M,n)$:

$$P(X=k) = C_M^k C_{N-M}^{n-k} / C_N^n =: h(k;N,M,n), \quad k=0,1,\cdots,n.$$

- 例: $n=5$. H-T 字符串的权重:

$$HHTHT \mapsto \frac{M}{N} \cdot \frac{M-1}{N-1} \cdot \frac{N-M}{N-2} \cdot \frac{M-2}{N-3} \cdot \frac{N-M-1}{N-4}.$$

- 给定n. 当$N \to \infty$, $\frac{M}{N} \to p$ 时,

$$h(k;N,M,n) \to b(k;n,p), \forall k \geqslant 0.$$

- 几何(Geometric)分布, $X \sim G(p)$:

$$P(X=k)=q^{k-1}p, \quad k=1,2,\cdots.$$

- 尾分布: $P(X>k)=q^k, \forall k \geqslant 0$.
- 无记忆性:

$$P(X-k=\ell | X>k)=P(X=\ell).$$

- 帕斯卡(Pascal)分布, $X \sim P(r,p)$:

$$P(X=k)=C_{k-1}^{k-r}q^{k-r}p^r =: f(k;r,p), \quad k=r,r+1,\cdots.$$

- 负二项(Negative Binomial)分布, $X \sim NB(r,p)$:

$$P(X=\ell)=C_{r+\ell-1}^{\ell}q^{\ell}p^r =: nb(\ell;r,p), \ \ell=0,1,2,\cdots.$$

- 帕斯卡分布$f(k;r,p)$, 负二项分布$nb(\ell;r,p)$:

$$f(k;r,p) = nb(\ell;r,p) = C_{k-1}^{r-1} q^{k-r} p^r, \quad (2.3.11)$$

$$k = r + \ell = r, r+1, \cdots.$$

- 分赌注问题: 先胜t 局者赢. 甲已胜n 局, 乙已胜m 局.

如何分赌注?

(1) H: 甲一局胜, 概率为p.

甲还需胜$r = t - n$ 次, 乙还需$s = t - m$ 次.

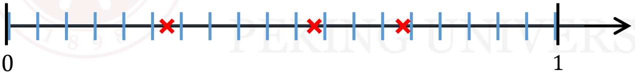
(2) 接下来, 甲第r 次胜时, 乙恰胜ℓ 次的概率$= nb(\ell;r,p)$.

(3) $P($ "甲赢" $) = \sum_{\ell=0}^{s-1} nb(\ell;r,p)$.

- 泊松(Poisson)分布$X \sim P(\lambda)$:

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \quad k=0,1,2,\cdots.$$

- 例2.4.10. 在7.5秒内放射出的粒子数$X \sim P(\lambda)$.
- 将7.5秒视为单位时间, 等分成n 段.

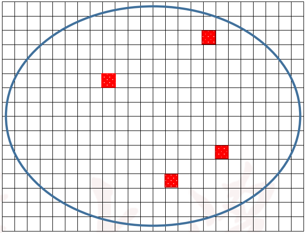


- 在每一段内放射粒子的概率为$p=\frac{\lambda}{n}$,

  在不同的段内是否放射粒子相互独立.

- 将该放射性物质等分成n 块.
- 每一块放射粒子的概率为$p = \frac{\lambda}{n}$,

  不同的块是否放射粒子相互独立.
- $P(X = k) \approx b(k; n, p)$, 其中$p = \frac{\lambda}{n}$.
- §2.4 二项分布$b(k; n, p)$ 与泊松分布p_k.



$$b(k; n, p) = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}$$

$$\approx \frac{1}{k!}(np)^k (1-p)^n \xrightarrow{n\to\infty, np\to\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad \forall k \geqslant 0.$$

- $b(k;n,p)$ 单峰:

$$\alpha_k = \frac{b(k;n,p)}{b(k-1;n,p)} = 1 + \frac{(n+1)p-k}{kq} \geqslant 1 \text{ iff } k \leqslant (n+1)p$$

- 最大值点k_0:

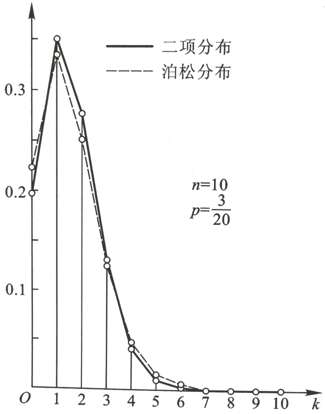
  若$a=(n+1)p \notin \mathbb{Z}$, 则$k_0=[a]$;

  若$a \in \mathbb{Z}$, 则$k_0=a$, $a-1$;

- $p_k(\lambda)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ 单峰:

  $$\beta_k = \frac{p_k(\lambda)}{p_{k-1}(\lambda)} = \frac{\lambda}{k} \geqslant 1 \text{ iff } k \leqslant \lambda.$$

  峰值: $[\lambda]$, $\lambda-1$.



连续型分布: 密度

- (概率)密度(函数) (p.d.f.) $p(x)$,

$$\mu((-\infty, x]) = \int_{-\infty}^{x} p(y)dy, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

其中, $p(x) \geqslant 0;\quad \int p(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1.$

- 连续型随机变量: $\forall x$,

$$P(X \leqslant x) = \int_{-\infty}^{x} p(y)dy, \quad P(X > x) = \int_{x}^{\infty} p(y)dy.$$

- 单独谈论一个点x 对应的$p(x)$ 是没有意义的.

- 密度: 假设p 在x 点连续，则

$$P\big(X \in (x-\Delta x, x]\big) = p(x)\Delta x + o(\Delta x).$$

- 不是概率:

$$P(X = x) \neq p(x).$$

- 若X 是连续型随机变量，则对任意$x \in \mathbb{R}$, $P(X = x) = 0$.

- 均匀(uniform)分布, $X \sim U(a,b)$:

$$p(x) = \frac{1}{b-a} \cdot 1_{\{a \leqslant x \leqslant b\}};$$

或

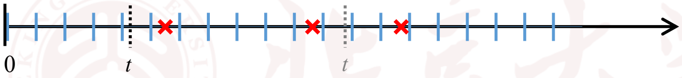
$$p(x) = \frac{1}{b-a}, \quad (\text{其中}) \ a < x < b.$$

- 几何概型.

- 指数(exponential)分布, $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$:

$$p(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad 其中\ x \geqslant 0, (或 x > 0).$$

- 例2.4.10. 第一个粒子放射时刻$X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$.



- 在$\frac{1}{n}$时间内放射粒子的概率为$p = \lambda \times \frac{1}{n}$. $Y \sim G(p)$.
- 尾分布 $P(X > t) = e^{-\lambda t}$: $X \approx \frac{Y}{n}$,

$$P(X > t) \approx P(Y > nt) \approx (1 - p)^{nt} \approx e^{-\lambda t}.$$

- 无记忆性: $P(X - t > s | X > t) = e^{-\lambda s}$.

- 正态(Normal)分布,

  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

- 标准正态分布,

  $Z \sim N(0, 1)$:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

- $p(x) = \frac{1}{\sigma}\varphi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$.

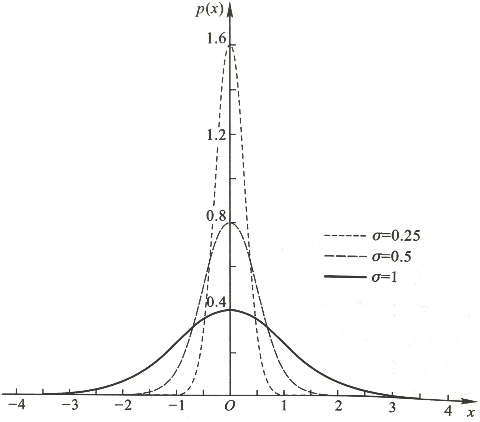


图 3.1.6 $\mu=0$ 且具有不同的 σ^2 的正态密度曲线

- $I = \int p_Z(x)dx = \int \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$

$$
\begin{aligned}
I^2 &= \frac{1}{2\pi} \iint e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-\frac{y^2}{2}} \underline{dxdy} \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2}} \underline{rdr} \right) \underline{d\theta} \\
&= \int_0^{\infty} e^{-R} dR = 1.
\end{aligned}
$$

- $B(2n, \frac{1}{2}) \to N(0,1)$, 高尔顿板, 中心极限定理.

- φ 为偶函数,

  拐点: $\sigma = \pm 1$.

- $\Phi(x) = P(Z \leqslant x)$:

  $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$.

- $\Phi(x)$: 查表.

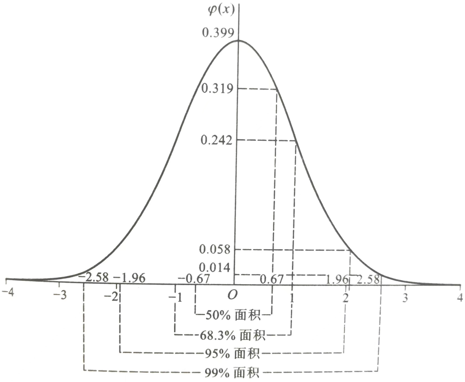


图 3.1.4 标准正态密度函数 $\varphi(x)$

- 伽玛(Gamma)分布, Γ 分布, $X \sim \Gamma(r,\lambda)$:

$$p(x) = \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} x^{r-1} e^{-\lambda x}, \quad \text{其中} x > 0.$$

- $\Gamma(r) = \int_0^\infty y^{r-1} e^{-y} dy.$
- $\Gamma(r+1) = r\Gamma(r)$:

$$\int_0^\infty y^r e^{-y} dy = -y^r e^{-y}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty r y^{r-1} e^{-y} dy.$$

- $\Gamma(1,\lambda) = \mathrm{Exp}(\lambda), \quad \Gamma(1) = 1.$
- $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{y}} e^{-y} dy = \sqrt{2}\int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{\pi}.$$

一般的分布: 分布函数

- μ 的分布函数: $F(x) = \mu((-\infty, x]), \ \forall x \in \mathbb{R}$.
- X 的分布函数:

$$F(x) = F_X(x) = P(X \leqslant x).$$

- 定理3.1.1. $F = F_X : x \mapsto P(X \leqslant x)$ 满足:

(1) 单调性: 若$x \leqslant y$, 则$F(x) \leqslant F(y)$.

(2) 归一性: $F(\infty) := \lim_{x\to\infty} F(x) = 1$;

$F(-\infty) := \lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$.

(3) 右连续性: $\lim_{\delta\to 0+} F(x+\delta) = F(x)$.

- 满足上述(1), (2), (3) 的函数被称为分布函数.

- 通过分布函数求一些特殊事件的概率:

  (1) $P(X < b) = F(b-)$.

  (2) $P(X = a) = F(a) - F(a-)$.

  (3) $P(a < X \leqslant b) = F(b) - F(a)$.

- 等价函数:

$$\hat{F}(x) = P(X < x) = \lim_{y \nearrow x} F(y) =: F(x-),$$

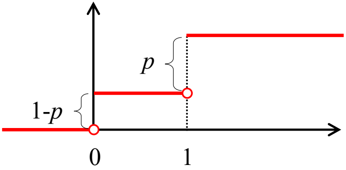
$$F(x) = \lim_{y \searrow x} \hat{F}(y) =: \hat{F}(x+).$$

- X 的尾分布函数:

$$G_X(x) = 1 - F(x) = P(X > x); \quad \hat{G}(x) = 1 - \hat{F}(x).$$

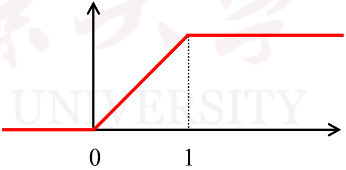
- 离散型：$P(X=x_i)=p_i$.

  x_i 为F_X 的跳点，p_i 为跳跃幅度.

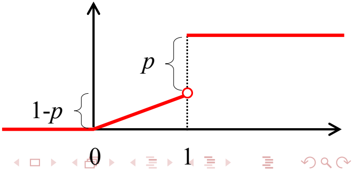


- 连续型：F是$\mathbb{R}$上连续函数；在一定条件下：

  $p_X(x)=F'_X(x)=-G'_X(x)$.



- * 既不是连续型、又不离散型的分布.



- 同分布，$X\overset{d}{=}Y$：$\mu_X=\mu_Y$，

  分布函数/分布列/密度相同.

§3.2 随机向量, 随机变量的独立性

- 随机向量: 同一个 $(\Omega, \mathcal{F})$ 中的多个随机变量(一起考虑).
- n 维随机向量: $\xi = \vec{X} = (X_1, \cdots, X_n)$

$$\vec{X} : \Omega \to \mathbb{R}^n, \ \ \omega \mapsto (X_1(\omega), \cdots, X_n(\omega)).$$

- $\{\vec{X} \leqslant \vec{x}\}$:

$$\begin{aligned} &\{X_1 \leqslant x_1, \cdots, X_n \leqslant x_n\} \\ =&\{\vec{X} \in D\}, \quad D = (-\infty, x_1] \times \cdots \times (-\infty, x_n]. \end{aligned}$$

- $\sigma(\vec{X}) = \big\{\{\vec{X} \in B\}, \ \forall B \in \mathcal{B}^n\big\} \subseteq \mathcal{F}.$
- ∞ 维随机向量/一族随机变量: $(X_1, X_2, \cdots)$, $\{X_i, i \in I\}$.

以$n=2$ 为例, $\xi=(X,Y)$.

- 联合分布:

$$B \mapsto \mu_\xi(B) = P(\xi \in B), \quad \forall B \in \mathcal{B}^2.$$

- 联合分布函数:

$$F(x,y) = P(X \leqslant x, Y \leqslant y).$$

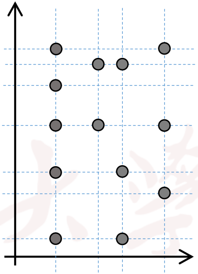
- $F(x,y)$的性质:

(1) (i)、(ii)、(iii) (见书P143, “左连续” 改为“右连续”).

(2) (iv) 对任意$a_1 < b_1$, $a_2 < b_2$, 都
有$F(b_1,b_2) - F(a_1,b_2) - F(b_1,a_2) + F(a_1,a_2) \geqslant 0$.

离散型

- 离散型: (x_i, y_i); $p_i \geqslant 0$, $\sum_i p_i = 1$.
  $P((X,Y) = (x_i, y_i)) = p_i$.
  $i = 1, \cdots, n$ 或 $i = 1, 2, \cdots$.

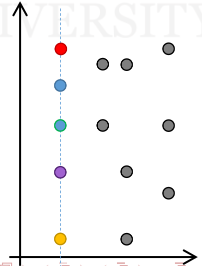


- 等价定义: X, Y 都是离散型随机变量.

$$P(X = x_i, Y = y_j), \quad i \in I, \ j \in J.$$

- 边缘分布列: $P(X = x_i), i \in I$.
- 条件分布列: 固定i,

  $P(Y = y_j | X = x_i), \ \ j \in J$.



- $P(X = x_i, Y = y_j)$
  $= P(X = x_i) P(Y = y_j | X = x_i)$.

例(习题三, 23). 多项分布. 有大量粉笔, 含红、黄、蓝三种颜色, 比例分别为p_1, p_2, p_3. 抽n 支, 抽到R 支红, Y 支黄, B 支蓝.

- ω: 长为n 的R-Y-B 字符串,

$$P(R=k_1, Y=k_2, B=k_3) = C_n^{k_1}\underline{C_{n-k_1}^{k_2}}p_1^{k_1}\underline{p_2^{k_2}p_3^{k_3}}, \quad (3.2.6)$$

$$\forall k_1, k_2, k_3 \geqslant 0, \quad k_1+k_2+k_3=n.$$

- 边缘分布列:

$$P(R=k_1) = \sum_{k_2=0}^{n-k_1} P(R=k_1, Y=k_2)$$

$$=C_n^{k_1}p_1^{k_1}\underline{q_1^{n-k_1}}, \quad k_1=0,\cdots,n.$$

- 条件分布列: 固定k_1,

$$P(Y=k_2|R=k_1)=C_m^{k_2}\hat{p}_2^{k_2}\hat{q}_2^{m-k_2},\quad k_2=0,\cdots,m,$$
$$m=n-k_1,\quad \hat{p}_2=\frac{p_2}{p_2+p_3}.$$

- 计算条件概率: 固定k_1,

$$P(Y=k_2|R=k_1)\propto P(R=k_1,Y=k_2).$$

例(习题三，24). 多元超几何分布. 袋中有红、黄、蓝球各N_1, N_2, N_3 个. 抽n 个, 抽到各R, Y, B 个.

- $\forall k_1, k_2, k_3 \geqslant 0,\ k_1 + k_2 + k_3 = n.$

$$P(R = k_1, Y = k_2, B = k_3) = \frac{C_{N_1}^{k_1} C_{N_2}^{k_2} C_{N_3}^{k_3}}{C_N^n}. \quad (3.2.7)$$

- 边缘分布列:

$$P(R = k_1) = \sum_{k_2=0}^{m} P(R = k_1, Y = k_2) \quad (m = n - k_1)$$

$$= \frac{C_{N_1}^{k_1} C_{N_2+N_3}^{k_2+k_3}}{C_N^n} = \frac{C_{N_1}^{k_1} C_{N-N_1}^{n-k_1}}{C_N^n},\quad k_1 = 0, \cdots, n.$$

- 条件分布列: 固定k_1,

$$P(Y = k_2 | R = k_1) = \frac{C_{N_2}^{k_2} C_{N_3}^{k_3}}{C_{N_2+N_3}^{m}},\quad k_2 = 0, \cdots, m.$$

- 连续型: (X,Y) 有联合概率密度函数$p(x,y)=p_{X,Y}(x,y)$,

$$P(X\leqslant x,Y\leqslant y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}p(u,v)dudv,\quad \forall x,y.$$

- $P\big((X,Y)\in D\big)=\iint_D p(x,y)dxdy,\ \ \forall D\in\mathcal{B}^2,$
- $D=\{(x,x):x\in\mathbb{R}\}$:

$$P(X=Y)=\iint_D p(x,y)dxdy=0.$$

- X, Y 都是连续型.
- 边缘密度: $p_X(x)=\int p(x,y)dy,$

$$P(X\leqslant x)=P(X\leqslant x,Y\in\mathbb{R})=\int_{-\infty}^{x}\int p(z,y)dydz.$$

- 条件密度: 固定x ($p_X(x) > 0$).

$$p_{Y|X}(y|x) = \frac{p(x,y)}{p_X(x)}, \quad \forall y.$$

- 假设联合密度连续. 条件分布函数:

$$\begin{aligned}
P(Y \leqslant y|X = x) &:= \lim_{\delta \to 0+} P(Y \leqslant y|x - \delta < X \leqslant x + \delta). \\
&= \lim_{\delta \to 0+} \frac{P(x - \delta \leqslant X \leqslant x + \delta, Y \leqslant y)}{P(x - \delta \leqslant X \leqslant x + \delta)} \\
&= \lim_{\delta \to 0+} \frac{\int_{x-\delta}^{x+\delta} \int_{-\infty}^{y} p(u,v)dvdu}{\int_{x-\delta}^{x+\delta} p_X(u)du} = \int_{-\infty}^{y} \frac{p(x,v)}{p_X(x)} dv.
\end{aligned}$$

- 计算: $p_{Y|X}(y|x) \propto p(x,y)$.
- 联合密度: $p(x,y) = p_X(x) p_{Y|X}(y|x)$.

- X, Y 都是连续型变量, $\xi = (X, Y)$ 不一定是连续型向量.
- 例, $\xi = (Z, Z)$, 其中$Z \sim N(0,1)$.
- 例, $U \sim U(0,1)$:

$$X = \cos(2\pi U), \quad Y = \sin(2\pi U).$$

(1) $(X, Y) \sim U(S^1)$.

(2) 条件分布函数: 例, 若$|x| < 1$, 则$\forall \varepsilon > 0$,

$$P(Y \leqslant \sqrt{1 - x^2} + \varepsilon | X = x)$$
$$= \lim_{\delta \to 0+} P(Y \leqslant \sqrt{1 - x^2} + \varepsilon | x - \delta < X \leqslant x + \delta) = 1.$$

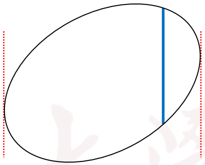
(3) 条件分布(列):

$$P\left(Y = \pm\sqrt{1 - x^2} \,\middle|\, X = x\right) = \frac{1}{2}.$$

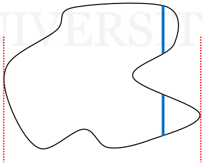
- 均匀分布, $\vec{X} \sim U(D)$: $p(\vec{x}) = \frac{1}{|D|} \cdot 1_D(\vec{x})$.
- $n = 2$:

$$p_{Y|X}(y|x) = \frac{1}{|D_x|} \cdot 1_{D_x}(y),$$

$$D_x = \{y : (x, y) \in D\}.$$



- 更一般的区域.



- 参数: $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$, $\sigma_1, \sigma_2 > 0$; $\rho \in (-1, 1)$.
- 联合密度的表达式如下(3.2.22):

$$p(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \cdot I\right\},$$

$$\text{其中, } I = \frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}$$

$$= u^2 - 2\rho uv + v^2.$$

- 记$\vec{\mu} = (\mu_1, \mu_2)$, $\mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$, 则

$$p(x, y) = C \exp\left\{-\frac{1}{2}(x-\mu_1, y-\mu_2)\mathbf{\Sigma}^{-1}(x-\mu_1, y-\mu_2)^T\right\}.$$

- 二元标准正态分布: $\mu_1 = \mu_2 = 0,\ \sigma_1 = \sigma_2 = 1;\ \rho = 0.$

$$q(x,y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}.$$

- 一般情形, $u = \frac{x-\mu_1}{\sigma_1},\ v = \frac{y-\mu_2}{\sigma_2}$

$$\begin{aligned} I &= u^2 - 2\rho uv + v^2 \\ &= (v-\rho u)^2 + (\sqrt{1-\rho^2}u)^2. \end{aligned}$$

- 于是,

$$\begin{aligned} p(x,y) &= C \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \cdot I\right\} \\ &= \tilde{C} \cdot q\left(\frac{v-\rho u}{\sqrt{1-\rho^2}},\ u\right) \end{aligned}$$

- 密度函数图:

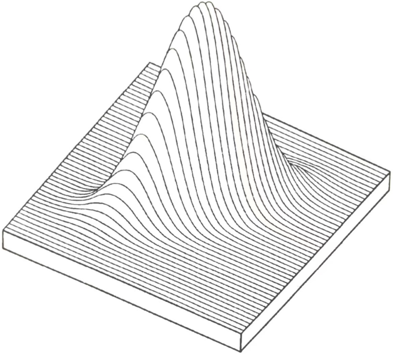


图 3.2.3　二维正态密度曲面

- 定理3.2.1. 设$p(x,y) = C\cdot\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\cdot I\right\}$, 其中 $I = u^2 - 2\rho uv + v^2$, $u = (x-\mu_1)/\sigma_1$, $v = (y-\mu_2)/\sigma_2$. 则

(1) 边缘: $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$.

(2) 条件密度$p_{Y|X}(y|x)$:

$$\hat{C}\exp\left\{-\frac{\left(y-\left(\mu_2+\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1)\right)\right)^2}{2(1-\rho^2)\sigma_2^2}\right\}.$$

- $I = (v-\rho u)^2 + +(\sqrt{1-\rho^2}u)^2$.
- 固定x, $p_{Y|X}(y|x) \propto p(x,y)$:

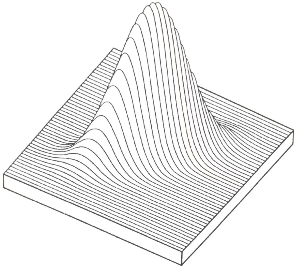


图 3.2.3 二维正态密度曲面

$$p_{Y|X}(y|x) = \hat{C}\cdot\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2\right\}.$$

随机变量的相互独立性

- 若$\forall x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{R}$,

$$P(X_1 \leqslant x_1, \cdots, X_n \leqslant x_n) = P(X_1 \leqslant x_1) \cdots P(X_n \leqslant x_n),$$

则称$X_1, \cdots, X_n$ 相互独立. (定义3.2.3)

- $\{X \leqslant x\} \to \{X \in B\}$:

$$P(X_i \in B_i, \forall i) = \prod_i P(X_i \in B_i), \quad \forall B_1, \cdots, B_n \in \mathcal{B}.$$

- ⋆⋆ iff 对任意$\forall B_1, \cdots, B_n \in \mathcal{B}$, $\{X_1 \in B_1\}, \cdots, \{X_n \in B_n\}$ 相互独立.

独立性等价条件:

- 离散型: $X_1, \cdots, X_n$ 独立iff 对任意$x_i \in R_i$, $i = 1, \cdots, n$

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \cdots, X_n = x_n) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i = x_i),$$

其中R_i 是X_i 的取值空间.

- 连续型: $X_1, \cdots, X_n$ 独立iff

$$p_{(X_1,\cdots,X_n)}(\vec{x}) = \prod_{i=1}^{n} p_{X_i}(x_i).$$

- 例, 连续型, $n=2$:

$$p_{(X,Y)}(x,y)=p_X(x)p_Y(y),\qquad p_{Y|X}(y|x)=p_Y(y).$$

- 独立充分条件: $p(x,y)=f(x)g(y),\ x,y\in\mathbb{R}.$

(1) $p_X(x)=Cf(x)$,

$$C=\int g(y)dy=\frac{1}{\int f(x)dx}.$$

(2) $p_Y(y)=\frac{1}{C}g(y)$, $p(x,y)=Cf(x)\cdot\frac{1}{C}g(y)$.

- 独立充分条件: $p_{Y|X}(y|x)=g(y)$:

$$p(x,y)=p_X(x)g(y).$$

- $X_1, \cdots, X_n, \cdots$ 相互独立:

$$X_1, \cdots, X_n \text{ 相互独立}, \forall n.$$

- 两两独立: X_i 与X_j 独立, $\forall i \neq j$.
- 独立同分布:

$$X_1, \cdots, X_n, \text{ 或} X_1, X_2, \cdots \text{ 相互独立}, \quad \text{且} X_i \stackrel{d}{=} X_1, \forall i.$$

- independent and identically distributed, i.i.d..

随机变量独立的性质:

假设$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立，则

- 对任意互不相同的$i_1, \cdots i_k \in \{1, \cdots, n\}$,
  $X_{i_1}, \cdots, X_{i_k}$ 相互独立;
- 假设g_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, 是一元可测函数,
  则$g_1(X_1), g_2(X_2), \cdots, g_n(X_n)$ 相互独立;
- 假设$\phi(x_1, \cdots x_k)$ 是k-元可测函数,
  则$\phi(X_1, X_2, \cdots, X_k), X_{k+1}, \cdots, X_n$ 相互独立.

习题二、43. 每个虫卵独立地以概率p 孵化为幼虫.

虫卵数$X \sim P(\lambda)$, $Y =$ 幼虫数, $Z =$ 死卵数. 研究(Y, Z).

- 边缘分布: $X \sim P(\lambda)$.
- 条件分布:

$$P(Y = k|X = n) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad k = 0, 1, \cdots, n.$$

- 联合分布: $\forall k, \ell = 0, 1, \cdots,$

$$P(Y = k, Z = \ell) = P(Y = k, X = k + \ell)$$
$$= \frac{\lambda^{k+\ell}}{(k+\ell)!} e^{-\lambda} \times \frac{(k+\ell)!}{k!\ell!} p^k q^\ell = \frac{(\lambda p)^k}{k!} \cdot \frac{(\lambda q)^\ell}{\ell!} e^{-\lambda}.$$

- $Y \sim P(\lambda p)$, $Z \sim P(\lambda q)$, Y 与Z 独立: $e^{-\lambda} = e^{-\lambda p} \cdot e^{-\lambda q}$.

- 随机向量(一般化: 一维随机变量X_i 可以一般化为随机向量ξ):

$$X_i \to \xi_i = (X_{i,1}, \cdots, X_{i,d_i}).$$

- ξ_i, $i \in I$, 两两独立, 相互独立, 独立同分布. (类似定义)
- 定义中的$\{X \leqslant x\}$ 改为

$$\{\xi \leqslant \vec{x}\} = \{X_1 \leqslant x_1, \cdots, X_d \leqslant x_d\}.$$

§3.3 随机变量的函数及其分布

- 函数$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto y=f(x)$. 考虑X 的函数:

$$Y=f(X):\omega\mapsto f(X(\omega)).$$

- Y 是随机变量: $f^{-1}(D)=\{x:f(x)\in D\}$,

$$\{Y\leqslant y\}=\left\{X\in f^{-1}\big((-\infty,y]\big)\right\}\in\mathcal{F}.$$

- Borel 函数:

$$\{x:f(x)\leqslant y\}=f^{-1}\big((-\infty,y]\big)\in\mathcal{B},\quad \forall y\in\mathbb{R};$$
$$f^{-1}(B)\in\mathcal{B},\quad \forall B\in\mathcal{B}.$$

- $Y = f(X)$, 其中, f 是Borel 函数.
- 目标: 求Y 的分布.
- 离散型:

$$P(Y = y_j) = \sum_{i:f(x_i)=y_j} p_i.$$

- 一般情形, 分布函数法: $\{Y \in B\} = \{X \in f^{-1}(B)\}$,

$$F_Y(y) = P\big(f(X) \leqslant y\big) = P(X \in D),$$

其中$D = f^{-1}((-\infty, y])$.

- 若$X \overset{d}{=} Y$, 则$f(X) \overset{d}{=} f(Y)$, $\forall f$.

例. 分布函数F 的广义逆.

- 分布函数的广义逆:

$$F^{-1}(u) := \inf\{x : F(x) \geqslant u\}, \quad \forall u \in (0,1).$$

- $x_0 = F^{-1}(u) \leqslant x$ iff $u \leqslant F(x)$.

(1) 若$x > x_0$, 则$F(x) \geqslant u$; 若$x < x_0$, 则$F(x) < u$;

(2) 若$x = x_0$, 则$F(x) \geqslant u$. (F 右连续.)

- F^{-1} 是Borel 函数:

$$\{u : F^{-1}(u) \leqslant x\} = \big(0, F(x)\big].$$

- 分位数: $F^{-1}(p)$. 例, 连续型, 若$x_u = F^{-1}(u)$, 则$F(x_u) = u$.

- $F^{-1}(u) \leqslant x \ \text{ iff } \ u \leqslant F(x)$.
- 取$U \sim U(0,1)$, 令$X = F^{-1}(U)$. 则$F_X = F$.

$$P(X \leqslant x) = P\left(F^{-1}(U) \leqslant x\right) = P\left(U \leqslant F(x)\right) = F(x).$$

- 任意分布函数都是某随机变量的分布函数. (定理3.3.1)

- 若$F_1(x) \leqslant F_2(x)$ ($\Leftrightarrow G_1(x) \geqslant G_2(x)$), 则

$$F_2^{-1}(u) \leqslant F_1^{-1}(u) \Rightarrow X_2 := F_2^{-1}(U) \leqslant F_1^{-1}(U) =: X_1.$$

- $F(x) := F_1(x) \wedge F_2(x)$ 是分布函数:

$$P\big(F_1^{-1}(U) \vee F_2^{-1}(U) \leqslant x\big) = P\big(U \leqslant F_1(x), U \leqslant F_2(x)\big).$$

- $F(x) := pF_1(x) + qF_2(x)$ 是分布函数:

设U_1, U_2 i.i.d. $\sim U(0,1)$.

$$X = 1_{\{U_2 \leqslant p\}} F_1^{-1}(U_1) + 1_{\{U_2 > p\}} F_2^{-1}(U_1),$$

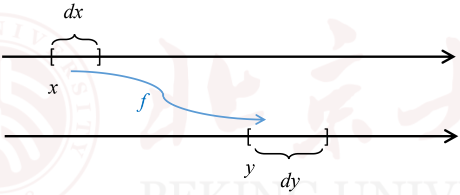
$$F_X(x) = P\left(U_2 \leqslant p, F_1^{-1}(U_1) \leqslant x\right) + P\left(U_2 > p, F_2^{-1}(U_1) \leqslant x\right)$$

$$= pF_1(x) + qF_2(x).$$

例. 连续型. $Y = f(X)$.

- f 严格单调, $x = g(y) \in C^1$: 例如, f 上升,

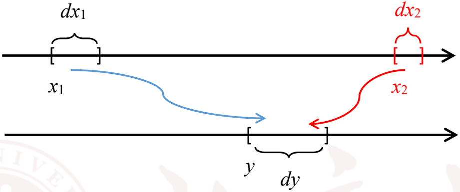
$$P(x < X \leqslant x + \Delta x) = P(y < Y \leqslant y + \Delta y).$$



- 确定x, y 的取值范围.
- $p_X(x)|dx| = p_Y(y)|dy|$: (3.3.12)

$$p_Y(y) = p_X(x)\frac{1}{|f'(x)|} = p_X\big(g(y)\big) \cdot |g'(y)|.$$

- f 为多对一:



- 确定x, y 的取值范围.
- 确定每个y 的所有原像点x_i, $i \in I_y$, (3.3.14)

$$p_Y(y) = \sum_{x_i : f(x_i) = y} p_X(x_i) \frac{1}{|f'(x_i)|}$$

$$= \sum_{i \in I_y} p_X\big(g_i(y)\big) \cdot |g_i'(y)|.$$

例3.3.1 $\sim$ 3.3.3. $Z \sim N(0,1)$,

$$p(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\Big\{ -\frac{z^2}{2} \Big\}.$$

- 非退化线性变换: $X = \mu + \sigma Z \sim N(\mu, \sigma^2)$: $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$,

$$p_X(x) = p_Z(z) \left| \frac{dz}{dx} \right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{ -\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \right\}.$$

- 若$Y \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则$Y^* = (Y-\mu)/\sigma \sim N(0,1)$.

$$a + bY = (a + b\mu) + (b\sigma)Y^* \sim N(a + b\mu, b^2\sigma^2).$$

- 对数正态$W = e^X$: $x = \ln w$. $\forall w > 0$,

$$p_W(w) = p_X(x)\left|\frac{dx}{dw}\right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}w}\exp\left\{-\frac{(\ln w - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\}.$$

- 平方$V = Z^2 \sim \Gamma(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$: $z_1 = \sqrt{v}$, $z_2 = -\sqrt{v}$.

$$\begin{aligned} p_V(v) =& p_Z(z_1)\left|\frac{dz_1}{dv}\right| + p_Z(z_2)\left|\frac{dz_2}{dv}\right| \\ =& 2\times\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{v}{2}}\frac{1}{2\sqrt{v}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}v^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{v}{2}}, \quad v > 0. \end{aligned}$$

随机向量的函数

- Borel 函数$\vec{Y} = f(\vec{X})$,

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \quad \hat{B} = f^{-1}(B) \in \mathcal{B}^n, \quad \forall B \in \mathcal{B}^m.$$

- 目标: 求$\vec{Y}$ 的分布.

$$P\big(\vec{Y} \in B\big) = P\big(\vec{X} \in \hat{B}\big).$$

- $\vec{X} \overset{d}{=} \vec{Y}$: $\quad \mu_{\vec{X}} = \mu_{\vec{Y}}$ iff $F_{\vec{X}} = F_{\vec{Y}}$.

- 若$\vec{X} \stackrel{d}{=} \vec{Y}$, 则$f(\vec{X}) \stackrel{d}{=} f(\vec{Y}), \forall f$.

$$\begin{aligned} P\big(f(\vec{X}) \in B\big) &= P\big(\vec{X} \in \hat{B}\big) \\ &= P\big(\vec{Y} \in \hat{B}\big) = P\big(f(\vec{Y}) \in B\big). \end{aligned}$$

- 若$\vec{X}$ 与$\vec{Y}$ 独立, 则$f(\vec{X})$ 与$g(\vec{Y})$ 独立:

$$P\big(f(\vec{X}) \in B, g(\vec{Y}) \in D\big) = P\big(\vec{X} \in \hat{B}, \vec{Y} \in \hat{D}\big)$$
$$= P\big(\vec{X} \in \hat{B}\big) P\big(\vec{Y} \in \hat{D}\big) = P\big(f(\vec{X}) \in B\big) P\big(g(\vec{Y}) \in D\big).$$

- 连续型, $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\vec{x} \mapsto \vec{y}$.
- 一对一: $p_{\vec{X}}(\vec{x})|d\vec{x}| = p_{\vec{Y}}(\vec{y})|d\vec{y}|$,

$$p_{\vec{Y}}(\vec{y}) = p_{\vec{X}}\big(g(\vec{y})\big) \cdot \left|\frac{\partial g(\vec{y})}{\partial \vec{y}}\right|, \quad J = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{y}} = \det\left(\frac{\partial x_i}{\partial y_j}\right)_{n\times n}.$$

- 多对一:

$$p_{\vec{Y}}(\vec{y}) = \sum_{i\in I_y} p_{\vec{X}}\big(g_i(\vec{y})\big) \cdot \left|\frac{\partial g_i(\vec{y})}{\partial \vec{y}}\right|.$$

- $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$: 以$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$ 为例, $W = f(X,Y)$.
- 方法一、分布函数法:

$$F_W(w) = P(W \leqslant w) = P\big((X,Y) \in D_w\big).$$

- 方法二、补变量法:

  找g, 使得$(x,y) \mapsto \big(f(x,y), g(x,y)\big)$ 是一对一的.

(1) 令$V = g(X,Y)$, 求联合密度:

$$p_{W,V}(w,v) = p_{X,Y}(x,y) \cdot \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(w,v)}\right|.$$

(2) 求边缘密度:

$$p_W(w) = \int p_{W,V}(w,v)dv.$$

例. 设(X,Y) 有联合密度$p(x,y)$. 令$W=X+Y$, 求p_W.

- 求F_W:

$$F_W(w)=\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{P(X+Y\leqslant w)}=\iint p(x,y)1_{\{x+y\leqslant w\}}dxdy.$$

- 化为积分:

$$\iint p(x,z-x)1_{\{z\leqslant w\}}dzdx=\int_{-\infty}^{w}\int p(x,z-x)dxdz.$$

- 求导:

$$p_W(w)=\int p(x,w-x)dx=\int p_X(x)p_{Y|X}(w-x|x)dx.$$

- 全概公式:

$$\underset{\sim}{\star\star}=\int p_X(x)P(Y\leqslant w-x|X=x)dx.$$

- 若X, Y 相互独立, 则

$$p_W(w) = \int p_X(x)p_Y(w-x)dx = p_X * p_Y(w),$$

$$f * g(w) := \int f(x)g(w-x)dx = \int f(w-y)g(y)dy.$$

- $\mu * \nu := \mathcal{L}(X+Y)$, 其中$X \sim \mu$, $Y \sim \nu$, 且X 与Y 独立.
- 连续型: $p_{\mu*\nu} = p_\mu * p_\nu$.
- 离散型: 例, 可能值为$\mathbb{Z}$, 则

$$(\mu * \nu)_k = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \mu_i \nu_{k-i}.$$

- 一族分布 Π 满足可加性/再生性指:

$$\mu * \nu \in \Pi, \quad \forall \mu, \nu \in \Pi.$$

- 例4.5.6. $B(n,p) * B(m,p) = B(n+m,p)$.
- 若$X_1, X_2, \cdots$ i.i.d., $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, 则

$$\mathcal{L}(S_n) * \mathcal{L}(S_m) = \mathcal{L}(S_{n+m}).$$

- 例. $\{P(\lambda) : \lambda\}$; $\{N(\mu, \sigma^2) : \mu, \sigma^2\}$; $\{\Gamma(r, \lambda) : r\}$.

例3.3.7. $\{\Gamma(r,\lambda):r\}$ 满足可加性:

若$X\sim\Gamma(r,\lambda)$, $Y\sim\Gamma(s,\lambda)$, 独立. 则$X+Y\sim\Gamma(r+s,\lambda)$.

- 密度:

$$p_X(x)=\frac{\lambda^r}{\Gamma(r)}x^{r-1}e^{-\lambda x},\quad x>0.$$

- $Z=X+Y$: $p_Z(z)=\int p_X(x)p_Y(z-x)dx$. $\forall z>0$,

$$p_Z(z)=C\int_0^z x^{r-1}e^{-\lambda x}\cdot(z-x)^{s-1}e^{-\lambda(z-x)}dx$$

$$=Ce^{-\lambda z}\int_0^1 (tz)^{r-1}\big((1-t)z\big)^{s-1}d(tz)=\hat{C}z^{r+s-1}e^{-\lambda z}.$$

- $X_1, X_2, \cdots$ i.i.d., $\sim \mathrm{Exp}(\lambda) = \Gamma(1, \lambda)$, 则

$$S_n \sim \Gamma(n, \lambda), \quad p_{S_n}(s) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} s^{n-1} e^{-\lambda s}, \; s > 0.$$

- $Z_1, Z_2, \cdots$ i.i.d., $\sim N(0,1)$. $Z_1^2 \sim \chi^2(1) = \Gamma(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$,

$$Z_1^2 + \cdots + Z_n^2 \sim \chi^2(n) = \Gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right). \quad (3.3.11)$$

- $\chi^2(2) = \Gamma(1, \frac{1}{2}) = \mathrm{Exp}(\frac{1}{2})$,

$$Z_1^2 + Z_2^2 \stackrel{d}{=} X_1, \quad \lambda = \frac{1}{2}.$$

例3.3.5 & 3.3.9. X, Y i.i.d., $\sim N(0,1)$. $p(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{z^2}{2}\right\}$.

- $X = R\cos\Theta$, $Y = R\sin\Theta$.

$$p_{R,\Theta}(r,\theta)drd\theta = p_{X,Y}(x,y)dxdy, \quad \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right| = r.$$

- $r > 0$, $\theta \in (0, 2\pi)$,

$$p_{R,\Theta}(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\exp\left\{-\frac{x^2+y^2}{2}\right\} \cdot r = \frac{1}{2\pi} \cdot r\exp\left\{-\frac{r^2}{2}\right\}.$$

- $W = R^2 = X^2 + Y^2 \sim \text{Exp}(\frac{1}{2}) = \Gamma(1, \frac{1}{2})$.

$$p_W(w) = p_R(r)\frac{dr}{dw} = r\exp\left\{-\frac{r^2}{2}\right\} \cdot \frac{1}{2r} = \frac{1}{2}e^{-\frac{w}{2}}, \quad \forall w > 0.$$

- $\Theta \sim U(0, 2\pi)$, 且Θ, R 相互独立.

- U_1, U_2 i.i.d., $\sim U(0,1)$, 则

$$(R^2, \Theta) = (W, \Theta) \stackrel{d}{=} (-2\ln U_1, 2\pi U_2):$$

$$P(W > x) = e^{-\frac{x}{2}} = P\left(U_1 < e^{-\frac{x}{2}}\right) = P\left(-2\ln U_1 > x\right).$$

- 从而,

$$(Z_1, Z_2) \stackrel{d}{=} \left(\sqrt{-2\ln U_1}\cos(2\pi U_2),\ \sqrt{-2\ln U_1}\sin(2\pi U_2)\right).$$

- $V = \tan\Theta \sim$ 柯西(Cauchy)分布: 二对一,

$$\frac{dv}{d\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta} = 1 + v^2.$$

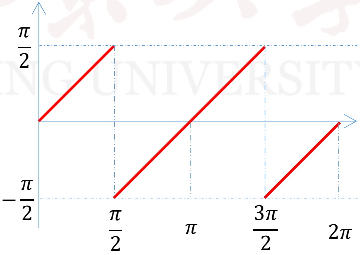
$$p_V(v) = \sum_{i=1}^{2} p_\Theta(\theta_i)\left|\frac{d\theta_i}{dv}\right| = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1+v^2}.$$

- $\hat{\Theta} = f(\Theta) \sim U(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$,

$V = \tan\hat{\Theta}$, 一对一.

$$p_V(v) = p_{\hat{\Theta}}(\theta)\left|\frac{d\theta}{dv}\right| = \star.$$

(3.3.13)



- 正交变换:

$$(\hat{X},\hat{Y}) = (X\cos\alpha + Y\sin\alpha,\ -X\sin\alpha + Y\cos\alpha).$$

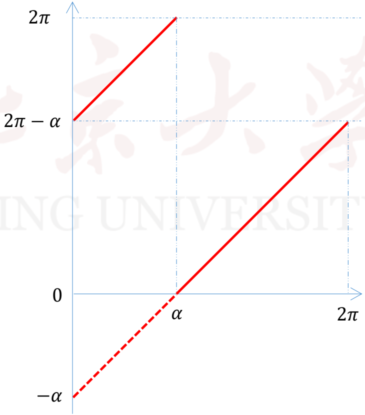
则$(\hat{X},\hat{Y}) \overset{d}{=} (X,Y)$.

(1) $r^2 = \hat{r}^2$:

$$\hat{p}(\hat{x},\hat{y}) = p(x,y) = \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{r^2}{2}}.$$

(2) 平移: $\hat{\Theta} = g(\Theta) \sim U(0,2\pi)$,

$$(R,\hat{\Theta}) \overset{d}{=} (R,\Theta).$$



例3.3.10. $(X, Y) \sim N(\vec{0}; \mathbf{\Sigma})$, 求$p_{W,V}$, 其中,

$$W = X\cos\alpha + Y\sin\alpha, \quad V = -X\sin\alpha + Y\cos\alpha.$$

- 联合密度: $p(x, y) = C\exp\{-\frac{1}{2}\cdot I\}$,

$$I = (x, y)\mathbf{\Sigma}^{-1}(x, y)^T = \frac{1}{(1-\rho^2)}\left(\frac{x^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{xy}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{y^2}{\sigma_2^2}\right).$$

- $p_{W,V}(w, v) = p_{X,Y}(x, y)$, $\frac{\partial(x,y)}{\partial(w,v)} = 1$:

$$I = (w, v)\mathbf{B}\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{B}^{-1}(w, v)^T. \quad ((x, y) = (w, v)B)$$

- $(W, V) \sim N(\vec{0}, \hat{\mathbf{\Sigma}})$, $\hat{\mathbf{\Sigma}} = \mathbf{B}\mathbf{\Sigma}\mathbf{B}^{-1}$. n 维类似.
- $\hat{\sigma}_{12} = \rho\sigma_1\sigma_2(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) - (\sigma_1^2 - \sigma_2^2)\cos\alpha\sin\alpha$.
- 取α 使得$\hat{\sigma}_{12} = 0$:

$$\begin{cases} \alpha = \pi/4, & 若\sigma_1^2 = \sigma_2^2; \\ \tan(2\alpha) = 2\rho\sigma_1\sigma_2/(\sigma_1^2 - \sigma_2^2), & 若\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2. \end{cases}$$

例. (指数分布) $X_1, \cdots, X_n$ 相互独立, $X_i \sim \text{Exp}(\lambda_i)$, $\forall i$.

- $aX_1 \sim \text{Exp}(\lambda_1/a)$:

$$P(aX_1 > x) = P(X_1 > \frac{x}{a}) = e^{-\frac{\lambda}{a}x}.$$

- $Y := \min_{1 \leqslant i \leqslant n} X_i$. 则$\forall x > 0$,

$$P(Y > x) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i > x) = e^{-\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x}. \quad (3.3.26)$$

- 例, n 个相互独立的随机变量的最大值:

$$P\left(\max_{1 \leqslant i \leqslant n} X_i \leqslant x\right) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \leqslant x). \quad (3.3.25)$$