第八章、假设检验

§8.1 问题的提法

- 例1.1. 200 件产品, b 件次品. 问: 次品率$p(=\frac{b}{200})\leqslant 3\%$?
  方法: 抽查10 件, 观察数据(例如: 发现2 件次品).
- 例1.2. 纸币长度$X\sim N(\mu,\sigma^2)$. 问: $\mu=155\text{mm}$?
  方法: 测量10 张纸币的长度, 得到数据$(x_1,\cdots,x_{10})$.
- 检验与估计相同之处.
  模型: $X\sim F_\theta$, $\theta\in\Theta$. 目标: 对θ 做出一些结论.
  方法: 抽样, 产生数据$X_1,\cdots,X_n\sim$ i.i.d. F_θ.
- 检验与估计不同之处.
  估计: 输出值$\hat{p}$, $\hat{\mu}$, 或者区间.
  检验: 回答问题, 输出“是”或“否”.

- 定义1.1. 零假设/原假设$H_0 : \theta \in \Theta_0$.
  对立假设/备择假设$H_1 : \theta \in \Theta_1 = \Theta \backslash \Theta_0$.
  检验问题(Θ_0, Θ_1). $H_0 : \theta \in \Theta_0 \leftrightarrow H_1 : \theta \in \Theta_1$.
- 问题的提法: H_0 是否成立?
- 检验方法: 给出一个否定域$\mathcal{W}$ $(\subseteq \mathbb{R}^n)$.
  若数据$\vec{x} = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathcal{W}$, 则输出 “拒绝(否定) H_0” ;
  若$\vec{x} \notin \mathcal{W}$, 则输出 “不拒绝(接受) H_0” .

检验方法= 带概率的反证法.

- 寻找$\mathcal{W}$ 使得

$$P_\theta(\vec{X} \in \mathcal{W}) \leqslant \alpha, \quad \theta \in \Theta_0.$$

- $\vec{x} \in \mathcal{W}$: 假设H_0 成立, 那么小概率事件$\{\vec{X} \in \mathcal{W}\}$ 发生了, 矛盾! 因此, 原假设H_0 不成立. 即, 否定H_0.
  注: 在指定水平下有充分证据表明H_0 不成立, 推出H_1 成立.
  强烈的否定!

- $\vec{x} \notin \mathcal{W}$: 没有足够充分的证据表明$H_0$ 不成立.
  但同样不代表已经有充分的证据接受H_0, 微弱的接受.

- 两类错误:
  第一类: H_0 为真, 否定H_0. 犯错概率$P_\theta(\vec{X} \in \mathcal{W})$, $\theta \in \Theta_0$.
  第二类: H_0 为假, 接受H_0. 犯错概率$P_\theta(\vec{X} \notin \mathcal{W})$, $\theta \in \Theta_1$.

例1.6. 药品检验. 药效$X \sim N(\mu, \sigma^2)$, σ^2 已知.
若$\mu \geqslant \mu_0$, 则药有效; 若$\mu \leqslant \mu_0$, 则药无效.

- 怎样提H_0?

$$H_0 : \mu \geqslant \mu_0 \leftrightarrow H_1 : \mu < \mu_0$$

$$H_0 : \mu \leqslant \mu_0 \leftrightarrow H_1 : \mu > \mu_0.$$

- 控制第一类错误, 即H_0 为真却输出“认定H_1”的概率

$$\sup_{\theta \in \Theta_0} P_\theta(\vec{X} \in \mathcal{W}) \leqslant \alpha.$$

- 防止假药上市, 即$\mu \leqslant \mu_0$ 为真却输出“认定$\mu \geqslant \mu_0$”.
- 因此, 应该选$H_0 : \mu \leqslant \mu_0 \leftrightarrow H_1 : \mu > \mu_0$.

- 定义1.2. 称$\beta_{\mathcal{W}}(\theta) := P_\theta(\vec{X} \in \mathcal{W})$ 为$\mathcal{W}$ 的功效函数. 若

$$P_\theta(\vec{X} \in \mathcal{W}) \leqslant \alpha, \quad \forall \theta \in \Theta_0,$$

  则称$\mathcal{W}$ 为检验问题(Θ_0, Θ_1) 的一个(显著性)水平为α 的否定域.

- 注: 选取$\mathcal{W}$, 使得$\beta_{\mathcal{W}}(\theta)$ 在Θ_0 小, 在Θ_1 越大越好.

- 定义1.3. 若$\mathcal{W}$ 是检验问题(Θ_0, Θ_1) 的水平为α 的否定域, 并且对任意水平为α 的否定域$\tilde{\mathcal{W}}$ 都有:

$$P_\theta(\vec{X} \in \mathcal{W}) \geqslant P_\theta(\vec{X} \in \tilde{\mathcal{W}}), \quad \forall \theta \in \Theta_1,$$

  则称$\mathcal{W}$ 为检验问题(Θ_0, Θ_1) 的水平为α 的一致最大功效否定域/UMP否定域.

- 定义1.4. 若

$$P_{\theta_0}(\vec{X} \in \mathcal{W}) \leqslant \alpha \leqslant P_{\theta_1}(\vec{X} \in \mathcal{W}), \quad \forall \theta_0 \in \Theta_0, \theta_1 \in \Theta_1,$$

则称$\mathcal{W}$ 为检验问题(Θ_0, Θ_1) 的一个水平为α 的无偏否定域.

- 定义1.5. 若$\mathcal{W}$ 是检验问题(Θ_0, Θ_1) 的水平为α 的无偏否定域, 并且对任意水平为α 的无偏否定域$\tilde{\mathcal{W}}$ 都有:

$$P_\theta(\vec{X} \in \mathcal{W}) \geqslant P_\theta(\vec{X} \in \tilde{\mathcal{W}}), \quad \forall \theta \in \Theta_1,$$

则称$\mathcal{W}$ 为检验问题(Θ_0, Θ_1) 的水平为α 的一致最大功效无偏否定域/最优无偏否定域/UMPU 否定域.

§8.2 N-P引理和似然比检验

- 简单假设检验问题: $\Theta = \{\theta_0, \theta_1\}$.

$$H_0 : \theta = \theta_0 \leftrightarrow H_1 : \theta = \theta_1.$$

- 似然函数: $L(\vec{x}, \theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \theta)$. (以连续型为例)
- 似然比否定域/似然比检验:

$$\mathcal{W}_\lambda = \{\vec{x} : L(\vec{x}, \theta_1) > \lambda L(\vec{x}, \theta_0)\}.$$

- 定理2.1. (Neyman-Pearson 引理) 若λ_0 使得

$$P_{\theta_0}\left(\vec{X} \in \mathcal{W}_{\lambda_0}\right) = \alpha,$$

则$\mathcal{W}_{\lambda_0}$ 是水平为α 的UMP 否定域.
- 定理2.2. 上述$\mathcal{W}_{\lambda_0}$ 是无偏否定域, 因而也是UMPU 否定域.

- N-P 引理的证明: 假设$\tilde{\mathcal{W}}$ 也是水平为α 的否定域, 往验证

$$P_{\theta_1}(\vec{X} \in \mathcal{W}) \geqslant P_{\theta_1}(\vec{X} \in \tilde{\mathcal{W}}), \quad \text{其中 } W_{\lambda_0} \triangleq \mathcal{W}.$$

- 由假设知, $\mathcal{W}$ 与$\tilde{\mathcal{W}}$ 都是水平为α 的否定域, 即

$$P_{\theta_0}(\vec{X} \in \mathcal{W}) = P_{\theta_0}(\vec{X} \in \tilde{\mathcal{W}}) = \alpha.$$

- 左右两边同时扣除交事件$\{\vec{X} \in \mathcal{W} \cap \tilde{\mathcal{W}}\}$ 的概率. 即, 需验证

$$P_{\theta_0}(\vec{X} \in \mathcal{W} \backslash \tilde{\mathcal{W}}) = P_{\theta_0}(\vec{X} \in \tilde{\mathcal{W}} \backslash \mathcal{W})$$

$$\Rightarrow L \triangleq P_{\theta_1}(\vec{X} \in \mathcal{W} \backslash \tilde{\mathcal{W}}) \geqslant P_{\theta_1}(\vec{X} \in \tilde{\mathcal{W}} \backslash \mathcal{W}) \triangleq R.$$

- 由$\mathcal{W} = \mathcal{W}_{\lambda_0} = \{\vec{x} : L(\vec{x}, \theta_1) > \lambda_0 L(\vec{x}, \theta_0)\}$ 知 "$\Rightarrow$" 成立:

$$L = \int_{\mathcal{W} \backslash \tilde{\mathcal{W}}} L(\vec{x}, \theta_1) d\vec{x} \geqslant \lambda_0 \int_{\mathcal{W} \backslash \tilde{\mathcal{W}}} L(\vec{x}, \theta_0) d\vec{x},$$

$$R = \int_{\tilde{\mathcal{W}} \backslash \mathcal{W}} L(\vec{x}, \theta_1) d\vec{x} \leqslant \lambda_0 \int_{\tilde{\mathcal{W}} \backslash \mathcal{W}} L(\vec{x}, \theta_0) d\vec{x}.$$

例2.1. $X \sim N(\mu, 1)$. 求假设检验问题$H_0: \mu = 0 \leftrightarrow H_1: \mu = 2$ 的水平为$\alpha = 0.05$ 的UMP 否定域.

- 似然函数与似然比:

$$\frac{L(\vec{x}, \theta_1)}{L(\vec{x}, \theta_0)} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n (x_i - 2)^2}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n x_i^2}} = e^{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n 4(x_i - 1)}.$$

- 似然比否定域:

$$\mathcal{W}_\lambda = \left\{\vec{x} : \frac{L(\vec{x}, \theta_1)}{L(\vec{x}, \theta_0)} > \lambda\right\} = \{\vec{x} : \bar{x} > c\}.$$

- $T(x_1, \cdots, x_n) = \bar{x}$ 称为检验统计量.
- 根据α 选择λ (等价地, 选择c):

$$\alpha = P_{\theta_0}\left(\bar{X} > c\right) = P(Z > c\sqrt{n}) \Rightarrow c = z_{1-\alpha}/\sqrt{n}.$$

- 查表获得$z_{1-0.05} = 1.65$. 从而所求为

$$\mathcal{W} = \{\vec{x} : \bar{x} > 1.65/\sqrt{n}\}.$$

例2.2. $\Theta=\{0,1\}$. $f(x,0)=1_{\{0<x<1\}}$, $f(x,1)=2x1_{\{0<x<1\}}$. 求假设检验问题$H_0:\theta=0\leftrightarrow H_1:\theta=1$ 的UMP 否定域.

- 似然函数与似然比:

$$\frac{L(\vec{x},\theta_1)}{L(\vec{x},\theta_0)}=\frac{2^n x_1\cdots x_n 1_{\{0<x_1,\cdots,x_n<1\}}}{1_{\{0<x_1,\cdots,x_n<1\}}}=2^n x_1\cdots x_n 1_{\{0<x_1,\cdots,x_n<1\}}.$$

- 似然比否定域与检验统计量$T=T(x_1,\cdots,x_n)$:

$$\mathcal{W}_\lambda=\left\{\vec{x}:\frac{L(\vec{x},\theta_1)}{L(\vec{x},\theta_0)}>\lambda\right\}=\left\{\vec{x}:-2\sum_{i=1}^n\ln x_i<c\right\}.$$

- 根据α 选择c: 在H_0 下, $-2\ln X\sim\chi^2(2)$, 于是, $T\sim\chi^2(2n)$.

$$\alpha=P_{\theta_0}\left(-2\sum_{i=1}^n\ln X_i<c\right)\Rightarrow c=\chi^2_\alpha(2n).$$

§8.3 单参数模型中的检验

- 复杂检验问题(Θ_0, θ_1) 与(Θ_0, Θ_1):

$$H_0 : \theta \in \Theta_0 \quad \leftrightarrow \quad H_1 : \theta = \theta_1,$$

$$H_0 : \theta \in \Theta_0 \quad \leftrightarrow \quad H_1 : \theta \in \Theta_1.$$

- 定理3.1. 若存在$\theta_0 \in \Theta_0$ 使得检验问题(θ_0, θ_1) 的水平为α 的UMP 否定域$\mathcal{W}$ 满足: $P_\theta(\vec{X} \in \mathcal{W}) \leqslant \alpha, \forall \theta \in \Theta_0$. 则, $\mathcal{W}$ 是检验问题(Θ_0, θ_1) 的水平为α 的UMP 否定域.
- 定理3.2. 若对任意$\theta_1 \in \Theta_1$, 检验问题(Θ_0, θ_1) 都存在水平为α 的UMP 否定域$\mathcal{W}$, 且此$\mathcal{W}$ 不依赖于θ_1. 则, 此$\mathcal{W}$ 是检验问题(Θ_0, Θ_1) 的水平为α 的UMP 否定域.

- 定义3.1. 若Θ 为有限或无穷区间, 密度或分布列为

$$f(x,\theta) = S(\theta)h(x)\exp\{C(\theta)T(x)\}, \quad \theta \in \Theta,$$

其中, $C(\theta)$ 严格增. 则称$f(x,\theta)$, $\theta \in \Theta$ 为单参数指数族.

- 定理3.3*. 若为单参族, 则$P_\theta(\sum_{i=1}^n T(X_i) > c)$ 关于θ 单调升.
- 例3.1. $f(x,\theta) = \frac{1}{\theta}\exp\{-\frac{1}{\theta}x\}$, $x > 0$. $\Theta = (0,\infty)$.

$$\text{记}X \sim \text{Exp}(1), \text{则}X_\theta \stackrel{d}{=} \theta X.$$

- 例3.2. $X \sim N(\mu,\sigma^2)$, σ^2 已知. $\theta = \mu$, $\Theta = (-\infty,\infty)$.

$$f(x,\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}x^2}e^{\frac{\mu}{\sigma^2}x}.$$

$$\text{记}X_0 \sim N(0,\sigma^2), \text{则}X_\mu \stackrel{d}{=} \mu + X_0.$$

单边假设检验问题

- 定理3.4. 假设总体分布族为单参指数族

$$f(x,\theta) = S(\theta)h(x)\exp\{C(\theta)T(x)\}, \quad \theta \in \Theta.$$

若

$$\mathcal{W} := \left\{\vec{x} : \sum_{i=1}^{n} T(x_i) > c\right\}$$

满足$P_{\theta_0}(\vec{X} \in \mathcal{W}) = \alpha$, 则$\mathcal{W}$ 是单边问题

$$H_0 : \theta \leqslant \theta_0 \leftrightarrow H_1 : \theta > \theta_0$$

的水平为α 的UMP 否定域.

- 单边问题$H_0 : \theta \geqslant \theta_0 \leftrightarrow H_1 : \theta < \theta_0$ 的UMP 否定域为$\mathcal{W} = \{\vec{x} : \sum_{i=1}^{n} T(x_i) < c\}$, 其中$c$ 使得$P_{\theta_0}(\vec{X} \in \mathcal{W}) = \alpha$.

例3.1. 总体: $\text{Exp}(\frac{1}{\theta})$, $\Theta = (0, \infty)$. $\theta \geqslant 6000$(单位: 小时)为合格. 测得5 个数据, 试进行检验.

- 提问题. $H_0 : \theta \leqslant \theta_0 = 6000 \leftrightarrow H_1 : \theta > \theta_0$. (防止次品出厂).
- 总体为单参指数族, $T(x) = x$, 因此, UMP 否定域形如

$$\mathcal{W} = \left\{ \vec{x} : \sum_{i=1}^{n} x_i > c \right\}.$$

- 在θ_0 下, $K_{2n} := 2\sum_{i=1}^{n} X_i/\theta_0 \sim \chi^2(2n)$. 因此, 要求

$$P_{\theta_0}(\vec{X} \in \mathcal{W}) = P(K_{2n} > 2c/\theta_0) = \alpha.$$

  即, 应取$2c/\theta_0 = \chi^2_{1-\alpha}(2n)$, 即$c = \chi^2_{1-\alpha}(2n) \times \theta_0/2$.
- 取$\alpha = 0.05$, 查表获得$\chi^2_{0.95}(10) = 18.307$,

  即$c = 18.307 \times 6000/2 = 54921$.
- $\sum_{i=1}^{5} x_i = 22313 < 54921$, 故接受$H_0$, 没有很强的统计结论.

例3.2. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, σ^2 已知$(= 1.21)$, 测得6个数据.
$\mu \geqslant 30$ 则合格. 问: 设水平为$\alpha = 0.05$, 是否可以出厂?

- 提问题. $H_0 : \mu \leqslant \mu_0 = 30 \leftrightarrow H_1 : \mu > \mu_0$. (防止次品出厂).
- 总体为单参指数族: $f(x, \mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}x^2} e^{\frac{\mu}{\sigma^2}x}$.
  $T(x) = x$, 因此, UMP 否定域形如
  $$\mathcal{W} = \left\{ \vec{x} : \sum_{i=1}^{n} x_i > \tilde{c} \right\} = \left\{ \vec{x} : \frac{\sqrt{n}(\bar{x} - \mu_0)}{\sigma} > c \right\}.$$
- 取$c = z_{1-\alpha}$:
  $$P_{\mu_0}(\vec{X} \in \mathcal{W}) = P_{\mu_0}\left(\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)}{\sigma} > c \right) = \alpha.$$
- 查表获得$z_{0.95} = 1.65$.
  代入数据: $\frac{\sqrt{n}(\bar{x} - \mu_0)}{\sigma} = 2.212 > 1.65$, 故否定$H_0$, 可出厂!

例3.3. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, μ 已知$(=3)$, 测得9个数据.
$\sigma < \sigma_0 = 0.005$ 则合格. 问: 设水平为$\alpha = 0.05$, 是否合格?

- 提问题. $H_0 : \sigma^2 \geqslant \sigma_0^2 \leftrightarrow H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$.
- 总体为单参指数族: $f(x, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\}$,
  $T(x) = (x-\mu)^2$, 因此, UMP 否定域形如

$$\mathcal{W} = \left\{ \vec{x} : \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 < \tilde{c} \right\} = \left\{ \vec{x} : \frac{1}{\sigma_0^2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 < c \right\}.$$

- 取$c = \chi_\alpha^2(n)$:

$$P_{\sigma_0^2}(\vec{X} \in \mathcal{W}) = P_{\sigma_0^2}\left(\frac{1}{\sigma_0^2} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2 < c \right) = \alpha.$$

- 查表获得$c = \chi_{0.05}^2(9) = 3.325$.
  代入数据: $\frac{1}{\sigma_0^2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 = 13.2563 > 3.325$, 故接受$H_0$.

- 定理3.5 & 3.6 *. 单参指数族的双边问题

$$H_0 : \theta = \theta_0 \leftrightarrow H_1 : \theta \neq \theta_0$$

不存在水平为α 的UMP 否定域.

- 定理3.7. 设总体为单参指数族, 在$\theta = \theta_0$ 下, 存在r_0 使得

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} T(X_i) - r_0 \overset{d}{=} r_0 - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} T(X_i).$$

令

$$\mathcal{W} = \left\{ \vec{x} : \left| \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} T(x_i) - r_0 \right| > c \right\},$$

其中c 满足$P_{\theta_0}(\vec{X} \in \mathcal{W}) = \alpha$. 则$\mathcal{W}$ 为双边问题的水平为α 的UMPU 否定域.

例3.4. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, σ^2 已知. 求

$$H_0 : \mu = \mu_0 \leftrightarrow H_1 : \mu \neq \mu_0$$

的水平为α 的最优无偏否定域.

- 总体为单参指数族: $f(x,\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}x^2} e^{\frac{\mu}{\sigma^2}x}$.
- $T(x) = x$. 在$\mu = \mu_0$ 下, $\bar{X} \sim N(\mu_0, \frac{\sigma^2}{n})$, 分布关于$\mu_0$ 对称. 因此, UMPU 否定域形如

$$\mathcal{W} = \{\vec{x} : |\bar{x} - \mu_0| > c\} = \left\{\vec{x} : \left|\frac{\bar{x} - \mu_0}{\sqrt{\sigma^2/n}}\right| > \tilde{c}\right\}.$$

- 查表获得$\tilde{c} = z_{1-\alpha/2}$, 于是$c = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha/2}$.

§8.4 广义似然比检验和关于正态总体参数的检验

- 假设检验问题$H_0: \theta \in \Theta_0 \leftrightarrow H_1: \theta \in \Theta_1$.
- 考虑θ 分别在$\Theta = \Theta_0 \cup \Theta_1$ 与Θ_0 中的最大似然估计$\hat{\theta} \in \Theta$ 与$\hat{\theta}_0 \in \Theta_0$:

$$L(\vec{x}, \hat{\theta}) = \sup_{\theta \in \Theta} L(\vec{x}, \theta), \quad L(\vec{x}, \hat{\theta}_0) = \sup_{\theta \in \Theta_0} L(\vec{x}, \theta).$$

- 定义4.1. 称$\lambda(\vec{x}) := L(\vec{x}, \hat{\theta}) / L(\vec{x}, \hat{\theta}_0)$ 为广义似然比.
- 广义似然比否定域指

$$\mathcal{W} := \left\{ \vec{x} : \frac{L(\vec{x}, \hat{\theta})}{L(\vec{x}, \hat{\theta}_0)} > c \right\} = \{ \vec{x} : \lambda(\vec{x}) > c \},$$

其中$c \geqslant 1$, 且满足$\sup\limits_{\theta \in \Theta_0} P_\theta(\vec{X} \in \mathcal{W}) = \alpha$.

2. 正态总体$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 均值μ 的检验

A. 单边问题$H_0 : \mu \leqslant \mu_0 \leftrightarrow H_1 : \mu > \mu_0$.

- $\theta = (\mu, \sigma^2)$, $\Theta = (-\infty, \infty) \times (0, \infty)$, $\Theta_0 = (-\infty, \mu_0] \times (0, \infty)$.
- 似然函数: $L(\vec{x}, \theta) = (\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma})^n \exp\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2\}$.
- 最大似然估计$\hat{\theta}$: $\hat{\mu} = \bar{x}$, $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (x_i - \hat{\mu})^2$,

$$L(\vec{x}, \hat{\theta}) = (\frac{1}{\sqrt{2\pi\hat{\sigma}^2}})^n \exp\left\{-\frac{1}{2\hat{\sigma}^2}\sum_{i=1}^n (x_i - \hat{\mu})^2\right\} = (2\pi\hat{\sigma}^2)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{n}{2}}.$$

- 最大似然估计$\hat{\theta}_0$:

$$\hat{\mu}_0 = \begin{cases} \bar{x}, & 若\bar{x} \leqslant \mu_0, \\ \mu_0, & 若\bar{x} > \mu_0, \end{cases} \qquad \hat{\sigma}_0^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (x_i - \hat{\mu}_0)^2.$$

$$L(\vec{x}, \hat{\theta}_0) = (2\pi\hat{\sigma}_0^2)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{n}{2}}.$$

A. 单边问题$H_0: \mu \leqslant \mu_0 \leftrightarrow H_1: \mu > \mu_0$ (续).

- 广义似然比: $\lambda(\vec{x}) = \left(\frac{\hat{\sigma}_0^2}{\hat{\sigma}^2}\right)^{\frac{n}{2}}$, 其中,

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2, \quad \hat{\sigma}_0^2 = \begin{cases} \hat{\sigma}^2, & 若\bar{x} \leqslant \mu_0, \\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (x_i - \mu_0)^2, & 若\bar{x} > \mu_0, \end{cases}$$

- 广义似然比否定域: $c_1 \geqslant 1$,

$$\mathcal{W} = \left\{\vec{x} : \frac{\hat{\sigma}_0^2}{\hat{\sigma}^2} > c_1\right\} = \left\{\vec{x} : \bar{x} > \mu_0 \text{ 且 } \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu_0)^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} > c_1\right\}.$$

- $\sum_{i=1}^n (x_i - \mu_0)^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 + n(\mu_0 - \bar{x})^2$, 因此

$$\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu_0)^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = 1 + \frac{T^2}{n-1}, \quad 其中\ T = \frac{\sqrt{n}(\bar{x} - \mu_0)}{S}.$$

A. 单边问题$H_0: \mu \leqslant \mu_0 \leftrightarrow H_1: \mu > \mu_0$ (续).

- 广义似然比: $\mathcal{W} = \left\{\vec{x}: \bar{x} > \mu_0 \text{ 且 } \frac{\sum_{i=1}^n (x_i-\mu_0)^2}{\sum_{i=1}^n (x_i-\bar{x})^2} > c_1\right\}$. 其中,

$$\frac{\sum_{i=1}^n (x_i-\mu_0)^2}{\sum_{i=1}^n (x_i-\bar{x})^2} = 1 + \frac{T^2}{n-1}, \quad \text{其中 } T = \frac{\sqrt{n}(\bar{x}-\mu_0)}{S}.$$

- 总结: $c > 0$,

$$\mathcal{W} = \{\vec{x}: T > 0 \text{ 且 } T^2 > c_2\} = \{\vec{x}: T > c\}.$$

- 根据α 求c:

  $\forall \mu \leqslant \mu_0$, $T \leqslant \frac{\sqrt{n}(\bar{x}-\mu)}{S} =: T_{n-1} \sim t(n-1)$, 在$\mu = \mu_0$ 时等号成立. 因此, 取$c = t_{1-\alpha}(n-1)$ 即可满足

$$\max_{\mu \leqslant \mu_0} P_\mu(T > c) = P(T_{n-1} > c) = \alpha.$$

B. 双边问题$H_0: \mu = \mu_0 \leftrightarrow H_1: \mu \neq \mu_0$.

- $\theta = (\mu, \sigma^2)$, $\Theta = (-\infty, \infty) \times (0, \infty)$, $\Theta_0 = \{\mu_0\} \times (0, \infty)$.
- 最大似然估计:

$$\hat{\mu} = \bar{x}, \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \hat{\mu})^2, \quad L(\vec{x}, \hat{\theta}) = (2\pi\hat{\sigma}^2)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{n}{2}}$$

$$\hat{\mu} = \mu_0, \quad \hat{\sigma}_0^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_0)^2, \quad L(\vec{x}, \hat{\theta}_0) = (2\pi\hat{\sigma}_0^2)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{n}{2}}.$$

- 广义似然比否定域: 记$T = \frac{\sqrt{n}(\bar{x}-\mu_0)}{S}$, 则

$$\mathcal{W} = \left\{\vec{x} : \frac{\hat{\sigma}_0^2}{\hat{\sigma}^2} > \tilde{c}\right\} = \{\vec{x} : |T| > c\}.$$

- 根据α 求c: 取$c = t_{1-\alpha/2}(n-1)$ 即可满足

$$P_{\mu_0}(\vec{X} \in \mathcal{W}) = P_{\mu_0}(|T| > c) = \alpha.$$

3. 正态总体$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 方差σ^2 的检验

A. 双边问题$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \leftrightarrow H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$.

- $\theta = (\mu, \sigma^2)$, $\Theta = (-\infty, \infty) \times (0, \infty)$, $\Theta_0 = (-\infty, \infty) \times \{\sigma_0^2\}$.
- 似然函数: $L(\vec{x}, \theta) = (\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}})^n \exp\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2\}$.
- 最大似然估计:

$$\hat{\mu} = \bar{x}, \ \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (x_i - \hat{\mu})^2, \quad \hat{\mu}_0 = \bar{x}, \ \hat{\sigma}_0^2 = \sigma_0^2.$$

$$L(\vec{x}, \hat{\theta}) = (2\pi\hat{\sigma}^2)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{n}{2}}, \quad L(\hat{\theta}_0) = (2\pi\sigma_0^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\left\{-\frac{n\hat{\sigma}^2}{2\sigma_0^2}\right\}.$$

- 广义似然比:

$$\lambda(\vec{x}) = \frac{L(\vec{x}, \hat{\theta})}{L(\vec{x}, \hat{\theta}_0)} = \left(\frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma_0^2}\right)^{-\frac{n}{2}} \exp\left\{\frac{n\hat{\sigma}^2}{2\sigma_0^2}\right\} \left(\frac{e}{n}\right)^{-\frac{n}{2}}.$$

A. 双边问题$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2 \leftrightarrow H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$ (续).

- 广义似然比:

$$\lambda(\vec{x}) = u^{-\frac{n}{2}} e^{\frac{u}{2}} \left(\frac{e}{n}\right)^{-\frac{n}{2}}, \quad \text{其中 } u = u(\vec{x}) = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{\sigma_0^2}.$$

- $f(u) := \left(\frac{u}{n}\right)^{-\frac{n}{2}} e^{\frac{u}{2}}$ 关于u 先$\downarrow$ 后$\uparrow$, (导函数先负后正).
- 若$\sigma^2 = \sigma_0^2$, 则$U = U(\vec{X}) = \frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1)$.
- 广义似然比否定域:

$$\{\vec{x} : f\big(u(\vec{x})\big) > c\} = \{\vec{x} : u(\vec{x}) < c_1 \text{ 或 } u(\vec{x}) > c_2\},$$

其中, c_1, c_2 满足$f(c_1) = f(c_2) = c$ 且$c_1 < c_2$.

A. 双边问题$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2 \leftrightarrow H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$ (续).

- UMPU 否定域: 令$g(u) := \left(\frac{u}{n}\right)^{-\frac{n-1}{2}} e^{\frac{u}{2}}$,

$$\{\vec{x} : g\big(u(\vec{x})\big) > c\} = \{\vec{x} : u(\vec{x}) < c_3 \text{ 或 } u(\vec{x}) > c_4\},$$

其中, c_3, c_4 满足$g(c_3) = g(c_4) = c$ 且$c_3 < c_4$,

$$u(\vec{x}) = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{\sigma_0^2}.$$

- 根据α 求c: 在H_0 下, $U := u(\vec{X}) \sim \chi^2(n-1)$.

找c 使得$P_{\sigma_0^2}(U < c_3) + P_{\sigma_0^2}(U > c_4) = \alpha$.

- 实际操作: 取$c_5 = \chi^2_{\alpha/2}(n-1)$, $c_6 = \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)$,

$$\mathcal{W} = \{\vec{x} : u(\vec{x}) < c_5 \text{ 或 } u(\vec{x}) > c_6\}.$$

B. 单边问题$H_0:\sigma^2 \geqslant \sigma_0^2 \leftrightarrow H_1:\sigma^2 < \sigma_0^2$.

- $\Theta = (-\infty,\infty)\times(0,\infty)$, $\Theta_0 = (-\infty,\infty)\times[\sigma_0^2,\infty)$.
- 似然函数: $L(\vec{x},\theta) = (\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}})^n \exp\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n (x_i-\mu)^2\}$.
- 最大似然估计:

$$\hat{\mu} = \hat{\mu}_0 = \bar{x},\ \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (x_i-\hat{\mu})^2,\ \hat{\sigma}_0^2 = \begin{cases} \hat{\sigma}^2, & \text{若 } \hat{\sigma}^2 \geqslant \sigma_0^2, \\ \sigma_0^2, & \text{若 } \hat{\sigma}^2 \leqslant \sigma_0^2. \end{cases}$$

- 广义似然比:

$$\lambda(\vec{x}) = \frac{L(\vec{x},\hat{\theta})}{L(\vec{x},\hat{\theta}_0)} = \begin{cases} 1, & \text{若 } \hat{\sigma}^2 \geqslant \sigma_0^2, \\ u^{-\frac{n}{2}} e^{\frac{u}{2}} \left(\frac{e}{n}\right)^{-\frac{n}{2}}, & \text{若 } \hat{\sigma}^2 \leqslant \sigma_0^2. \end{cases}$$

其中$u = u(\vec{x}) = \frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma_0^2}$.

B. 单边问题$H_0: \sigma^2 \geqslant \sigma_0^2 \leftrightarrow H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2$ (续).

- 广义似然比否定域:

$$\mathcal{W} = \{\vec{x} : \hat{\sigma}^2 \leqslant \sigma_0^2, \left(\frac{u}{n}\right)^{-\frac{n}{2}} e^{\frac{u}{2}} > \tilde{c}\} = \{\vec{x} : u < c\}.$$

其中$u = u(\vec{x}) = \frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma_0^2}$, $c < n$.

- 根据α 求c.

$\forall \sigma^2 \geqslant \sigma_0^2$, $U := u(\vec{X}) \geqslant \frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} =: U_{n-1} \sim \chi^2(n-1)$,

在$\sigma^2 = \sigma_0^2$ 时, 等号成立. 因此, 取$c = \chi_\alpha^2(n-1)$ 即可满足

$$\max_{\sigma^2 \geqslant \sigma_0^2} P_{\sigma^2}(U < c) = P(U_{n-1} < c) = \alpha.$$

- 假设$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$,
  数据: $X_1, \cdots, X_{n_1}; Y_1, \cdots, Y_{n_2}$ 相互独立.
  记$\vec{x} = (x_1, \cdots, x_{n_1})$, $\vec{y} = (y_1, \cdots, y_{n_2})$.
- A. 方差检验.

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \text{ 或 } H_0 : \sigma_1^2 \leqslant \sigma_2^2.$$

  B. 均值检验. 假设$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$,

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 \text{ 或 } H_0 : \mu_1 \leqslant \mu_2.$$

A. 方差检验. $H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2 \leftrightarrow H_1:\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$.

- 在Θ 中的最大似然估计:
  - 似然函数$L(\vec{x},\vec{y},\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2)$:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\right)^{n_1} e^{-\frac{1}{2\sigma_1^2}\sum_{i=1}^{n_1}(x_i-\mu_1)^2}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}\right)^{n_2} e^{-\frac{1}{2\sigma_2^2}\sum_{i=1}^{n_2}(y_i-\mu_2)^2}.$$

  - 似然估计:

$$\hat{\mu}_1=\bar{x},\ \hat{\sigma}_1^2=\frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}(x_i-\bar{x})^2;\quad \hat{\mu}_2=\bar{y},\ \hat{\sigma}_2^2=\frac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n_2}(y_i-\bar{y})^2.$$

  - 将似然估计代入似然函数:

$$\hat{L}=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^{n_1+n_2}\left(\frac{1}{\frac{1}{n_1}u}\right)^{\frac{n_1}{2}}\left(\frac{1}{\frac{1}{n_2}v}\right)^{\frac{n_2}{2}} e^{-\frac{n_1+n_2}{2}}.$$

A. 方差检验. $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \leftrightarrow H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ (续).

- 在Θ_0 中的最大似然估计:
  - 似然函数$L(\vec{x}, \vec{y}, \mu_1, \mu_2, \sigma^2)$:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^{n_1+n_2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^{n_1}(x_i-\mu_1)^2 + \sum_{i=1}^{n_2}(y_i-\mu_2)^2\right)\right\}.$$

  - 似然估计:

$$\hat{\mu}_1 = \bar{x}, \quad \hat{\mu}_2 = \bar{y}, \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_1}(x_i-\bar{x})^2 + \sum_{i=1}^{n_2}(y_i-\bar{y})^2}{n_1+n_2}.$$

  - 将似然估计代入似然函数:

$$\hat{L}_0 = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^{n_1+n_2} \left(\frac{1}{\frac{1}{n_1+n_2}(u+v)}\right)^{\frac{n_1+n_2}{2}} e^{-\frac{n_1+n_2}{2}}.$$

A. 方差检验. $H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2 \leftrightarrow H_1:\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$ (续).

- 广义似然比: $u=\sum_{i=1}^{n_1}(x_i-\bar{x})^2$, $v=\sum_{i=1}^{n_2}(y_i-\bar{y})^2$,

$$\lambda(\vec{x},\vec{y})=\frac{\left(\frac{1}{n_1+n_2}(u+v)\right)^{\frac{n_1+n_2}{2}}}{\left(\frac{1}{n_1}u\right)^{\frac{n_1}{2}}\left(\frac{1}{n_2}v\right)^{\frac{n_2}{2}}}=c_0\left(\frac{u}{u+v}\right)^{-\frac{n_1}{2}}\left(\frac{v}{u+v}\right)^{-\frac{n_2}{2}}.$$

- 广义似然比否定域形如

$$\left\{(\vec{x},\vec{y}):\frac{u}{u+v}<c_1 \text{ 或 } >c_2\right\}.$$

其中, c_1, c_2 基本上无法计算.

- 实际操作: 取c_3,c_4 使得

$$P_{H_0}\left(\frac{U}{U+V}<c_3\right)=P_{H_0}\left(\frac{U}{U+V}>c_4\right)=\frac{\alpha}{2}.$$

A. 方差检验. $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \leftrightarrow H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ (续).

- 定义4.2 (F 分布). $F(m_1, m_2)$ 指 $\frac{K_{m_1}/m_1}{K_{m_2}/m_2}$ 的分布, 其中, $K_{m_1} \sim \chi^2(m_1)$, $\tilde{K}_{m_2} \sim \chi^2(m_2)$, 且$K_{m_1}, K_{m_2}$ 相互独立. (密度可根据定理3.4.2计算得到.)
- $U = \sum_{i=1}^{n_1}(X_i - \bar{X})^2, \quad U/\sigma_1^2 \sim \chi^2(n_1 - 1)$,
  $V = \sum_{i=1}^{n_2}(Y_i - \bar{Y})^2, \quad V/\sigma_2^2 \sim \chi^2(n_2 - 1)$.
- 检验统计量: 在$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ 下,

$$\frac{U/(n_1 - 1)}{V/(n_2 - 1)} \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1).$$

- 否定域形式:

$$\mathcal{W} = \{(\vec{x}, \vec{y}) : \star < F_{\alpha/2}(n_1 - 1, n_2 - 1) \\ \text{或 } \star > F_{1-\alpha/2}(n_1 - 1, n_2 - 1)\}.$$

例4.4. 断裂强度试验表(见教材, $n_1 = n_2 = 8$). 比较σ_1^2 与σ_2^2.

- 检验统计量:

$$\frac{U/(n_1-1)}{V/(n_2-1)} = \frac{\frac{1}{n_1-1}\sum_{i=1}^{n_1}(x_i-\bar{x})^2}{\frac{1}{n_2-1}\sum_{i=1}^{n_2}(y_i-\bar{y})^2} = 0.9355.$$

- $H_0: \sigma_1^2 \leqslant \sigma_2^2$, 否定域:

$$\{(\vec{x},\vec{y}) : \star > F_{1-\alpha}(n_1,n_2) = F_{0.95}(7,7) = 3.7870\}.$$

因此, 不能否定$\sigma_1^2 \leqslant \sigma_2^2$.

- $H_0: \sigma_1^2 \leqslant \sigma_2^2$, 否定域:

$$\{(\vec{x},\vec{y}) : \star < F_\alpha(n_1,n_2) = F_{0.05}(7,7) = \frac{1}{F_{0.95}(7,7)} = \frac{1}{3.7870}\}.$$

因此, 也不能否定$\sigma_1^2 \leqslant \sigma_2^2$.

- 可以认为$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$, “风险不大”.

B. 均值检验. 假设$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 =: \sigma^2$, 但$\sigma^2$ 未知. 检验$H_0 : \mu_1 = \mu_2$.

- $\bar{X} - \bar{Y} \sim N(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma^2}{n_1} + \frac{\sigma^2}{n_2})$.
- 令$S^2 = \sum_{i=1}^{n_1}(X_i - \bar{X})^2 + \sum_{i=1}^{n_2}(Y_i - \bar{Y})^2$,
  则$S^2/\sigma^2 \sim \chi^2(n_1 + n_2 - 2)$.
- 检验统计量:

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}\sqrt{\frac{S^2}{n_1+n_2-2}}}.$$

- 定理4.1. 在H_0 下, $\mu_1 - \mu_2 = 0$, 于是, $T \sim t(n_1 + n_2 - 2)$.
- 否定域:

$$\mathcal{W} = \{(\vec{x}, \vec{y}) : |T| > t_{1-\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2)\}.$$

例4.5. 两组病人的胆固醇水平. $n_1 = n_2 = 32$, $\bar{x} = 241.76$(服药后), $\bar{y} = 224.62$, $s_1 = 51.2808$, $s_2 = 36.2710$.

- $H_0 : \sigma_1^2 \leqslant \sigma_2^2$, $H_0 : \sigma_1^2 \geqslant \sigma_2^2$ 都接受:

$$F_{0.025}(31,31) = 0.4881 < \frac{u/(n_1-1)}{v/(n_2-1)} = 1.9927 < F_{0.975}(31,31) = 2.0486.$$

- 假设$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$. 检验$H_0 : \mu_1 \leqslant \mu_2$. 否定域:

$$\mathcal{W} = \{(\vec{x},\vec{y}) : T(\vec{x},\vec{y}) > t_{1-\alpha}(n_1+n_2-2)\}.$$

- 若$\alpha = 0.1$, 则否定H_0; 若$\alpha = 0.05$, 则不能否定H_0.

$$t_{0.9}(62) < 1.3 < T(\vec{x},\vec{y}) = 1.5436 < 1.67 \approx t_{0.95}(62).$$

- 例4.5, 否定域:

$$\mathcal{W}_\alpha = \{(\vec{x}, \vec{y}) : T(\vec{x}, \vec{y}) > t_{1-\alpha}(n_1 + n_2 - 2)\}.$$

- α 越小, $\mathcal{W}_\alpha$ 就越小.
- 定义4.3. 给定样本$\vec{x} = (x_1, \cdots, x_n)$. 满足$\vec{x} \in \mathcal{W}_\alpha$ 的最小的α 称为检验的p 值, 记为$p(x_1, \cdots, x_n)$.
- p 值越小越好.

§8.5 关于比率的检验

$X \sim B(n,p)$, 参数: p, 范围: $[0,1]$. 检验问题:

$$H_0: p = p_0 \quad 或 \quad H_0: p \geqslant p_0 \quad 或 \quad H_0: p = p_0.$$

- 大样本方法: 当$n \gg 1$ 且$np_0 \geqslant 5$ 时, 用中心极限定理.
- 小样本方法. 联系F 分布.

例5.1. 50 ~ 54 岁的美国妇女乳腺癌发病率为$p_0 = 2\%$. 调查10000 名50 ~ 54 岁的母亲患有乳腺癌的妇女, 发现其中有400 名患乳腺癌. 检验

$$H_0: p = 2\% \leftrightarrow H_1: p \neq 2\%.$$

- $X \sim B(n,p)$: 在H_0 下, 近似地有

$$\frac{X - np}{\sqrt{npq}} \sim N(0,1), \quad (q = 1 - p).$$

- 否定域:

$$\mathcal{W} = \left\{ x : \left| \frac{X - np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}} \right| > z_{1-\alpha/2} \right\}.$$

- $\frac{x - np_0}{\sqrt{np_0q_0}} = 14.28 > 1.96 = z_{0.975}$, 否定$H_0$.

例5.2. 学生刻苦(复习时间 : 上课时间 $> 1 : 1$)的概率为p. 在132份调查问卷中发现有127 人刻苦. 检验

$$H_0 : p \leqslant p_0 = 0.9 \leftrightarrow H_1 : p > p_0.$$

- $X \sim B(n,p)$. 小样本方法: 否定域为$W = \{x : x \geqslant i\}$.
- i 满足$f(i,p_0) \leqslant \alpha < f(i-1,p_0)$: 由例3.6.7,
  $$f(i,p) = P_p(X \geqslant i) = \int_0^p \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} u^{i-1}(1-u)^{n-i}du.$$
- $W = \{x : f(x,p_0) \leqslant \alpha\}$. 因为, $x \geqslant i \Leftrightarrow f(x,p_0) \leqslant f(i,p_0)$.
- $f(x,p_0) = P(Y \geqslant y)$, 其中$Y \sim F = F(2(n-x+1), 2x)$,
  $$\varphi(y) := (1 + \tfrac{n-x+1}{x} y)^{-1} = p_0.$$
- $W = \{x : p(x) \geqslant p_0\}$, 其中, $p(x) := \varphi(F_{1-\alpha})$:
  $$f(x,p_0) \leqslant \alpha \text{ iff } y \geqslant F_{1-\alpha} \text{ iff } p_0 \leqslant \varphi(F_{1-\alpha}).$$
- 否定H_0:
  $$p(127) = \left(1 + \tfrac{132-127+1}{127} F_{0.95}\right)^{-1} = 0.9220 > p_0.$$

2. 两总体比较的假设检验问题.

总体: $X \sim B(n_1, p_1)$, $Y \sim B(n_2, p_2)$. 检验问题:

$$H_0: p_1 \leqslant p_2 \quad \text{或} \quad H_0: p_1 \geqslant p_2 \quad \text{或} \quad H_0: p_1 = p_2.$$

- CLT: $\frac{X - n_1 p_1}{\sqrt{n_1 p_1 q_1}} \overset{d}{\approx} Z \sim N(0,1)$. SLLN: $\hat{p}_1 = \frac{X}{n} \approx p_1$.
- $\frac{X}{n_1} - p_1 \overset{d}{\approx} \sqrt{\frac{\hat{p}_1 \hat{q}_1}{n_1}} Z_1$, $\frac{Y}{n_2} - p_2 \overset{d}{\approx} \sqrt{\frac{\hat{p}_2 \hat{q}_2}{n_2}} Z_2$.
- $(\frac{X}{n_1} - \frac{Y}{n_2}) - (p_1 - p_2) \overset{d}{\approx} \sqrt{\frac{\hat{p}_1 \hat{q}_1}{n_1} + \frac{\hat{p}_2 \hat{q}_2}{n_2}} Z$.
- $\xi = \Big((\frac{X}{n_1} - \frac{Y}{n_2}) - (p_1 - p_2) \Big) / \star\star$ 近似服从$N(0,1)$.
- $\eta = (\bar{X} - \bar{Y}) / \star\star \overset{H_0}{\leqslant} \xi$.
- 否定域为: $\mathcal{W} = \{x : \eta \geqslant z_{1-\alpha}\}$.

$$H_0: p_1 = p_2 \leftrightarrow H_1: p_1 \neq p_2.$$

- 在H_0 下, $p_1 = p_2 = p$. CLT:

$$\frac{X}{n_1} - p \overset{d}{\approx} \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n_1}} Z_1, \quad \frac{Y}{n_2} - p \overset{d}{\approx} \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n_2}} Z_2,$$
$$\frac{X}{n_1} - \frac{Y}{n_2} \overset{d}{\approx} \sqrt{(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})\hat{p}\hat{q}} Z.$$

- SLLN: $\hat{p} = \frac{X+Y}{n_1+n_2} \approx p.$
- $\zeta = (\bar{X} - \bar{Y})/\star\star$. 否定域: $\mathcal{W} = \{x : |\zeta| \geqslant z_{1-\alpha/2}\}$.

例5.3. 研究口服避孕药对40 ~ 44 岁年龄段妇女心脏的影响. 5000 位使用者三年内心梗死13 人; 10000 位不使用者三年内心梗死7 人. 检验$H_0: p_1 = p_2$. ($\alpha = 0.01$.)

- $\hat{p} = (13+7)/(5000+10000) = 20/15000.$
- $\zeta = (\bar{x}-\bar{y})/\sqrt{(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2})\hat{p}\hat{q}} = 3.01 > 2.58 = z_{0.995}$, 否定$H_0$.
- 改为验证$H_0: p_1 \leqslant p_2$.
- $\hat{p}_1 = 13/5000$, $\hat{p}_2 = 7/10000$.
- $\eta = (\bar{x}-\bar{y})/\sqrt{\frac{\hat{p}_1\hat{q}_1}{n_1}+\frac{\hat{p}_2\hat{q}_2}{n_2}} = 2.48 > 2.33 = z_{0.99}$, 否定$H_0$.

§8.6 拟合优度检验

$$H_0 : F = F_0 \leftrightarrow H_1 : F \neq F_0.$$

- $t_1 < \cdots < t_m$. $1 \ll m \ll n$. $m+1$ 个区间$I_1, \cdots, I_{m+1}$.
- 假设在I_i 中, 有$V_i = v_i$ 个数据.
- SLLN, 概率$\approx$ 频率:

$$\frac{v_i}{n} \approx P(X \in I_i) \stackrel{H_0}{=} F(t_i) - F(t_{i-1}) = p_i.$$

- CLT:

$$\frac{v_i - np_i}{\sqrt{np_i}} \approx \frac{v_i - np_i}{\sqrt{np_i(1-p_i)}} \text{ 近似服从 } N(0,1).$$

- 一个约束条件: $v_1 + \cdots + v_{m+1} = n$.

- V 近似地服从$\chi^2(m)$:

$$V = \sum_{i=1}^{m+1} \left(\frac{V_i - np_i}{\sqrt{np_i}} \right)^2 = \sum_{i=1}^{m+1} \frac{(V_i - np_i)^2}{np_i} = \sum_{i=1}^{m+1} \left(\frac{V_i}{n} - p_i \right)^2 \frac{n}{p_i}.$$

- 否定域: $\mathcal{W} = \{\vec{x} : V > \chi^2_{1-\alpha}(m)\}$.
- 注1: 结论应为接受H_0.
- 注2: $F_0 = \{F_\theta, \theta = (\theta_1, \cdots, \theta_k) \in \Theta\}$. 检验$H_0 : F \in \mathcal{F}_0$.
  解: 先求最大似然估计$\hat{\theta}$, 再检验$H_0 : F = F_{\hat{\theta}}$, 否定域:
  $\mathcal{W} = \{\vec{x} : V > \chi^2_{1-\alpha}(m - k)\}$.

例6.2. 某计算机产生的一组标准正态随机数: $n = 30$. 检验$H_0 : F = N(0,1)$.

- 分割点: $0, \pm0.8, \pm1.6$.

v_i	4	3	11	5	4	3
p_i	0.0548	0.1571	0.2881	0.2881	0.1571	0.0548

- $v = 7.43 < 11.07 = \chi^2_{0.95}(5)$, 接受$H_0$.

2. 柯氏(Kolmogorov)检验法

$$H_0 : F = F_0 \leftrightarrow H_1 : F \neq F_0.$$

- SLLN: 经验分布函数$F_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n 1_{\{X_i \leqslant x\}} \approx F(x)$.
- CLT: $\sqrt{n}(F_n(x) - F(x))$ 近似服从$N(0, \sigma^2)$.
- 定理6.1. $D_n = \sup_x |F_n(x) - F(x)|$, 则$\sqrt{n}D \xrightarrow{d} \xi$, 其中

$$F_\xi(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \exp(-2k^2x^2) 1_{\{x>0\}} = Q(x).$$

- 将数据$x_1, \cdots, x_n$ 排序得到$x_{(1)} < \cdots < x_{(n)}$. 则,

$$D_n = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \max \left\{ \frac{k}{n} - F_0(x_{(k)}), F_0(x_{(k)}-) - \frac{k-1}{n} \right\}.$$

- 否定域: $\mathcal{W} = \{\vec{x} : D_n(\vec{x}) > c\}$, 其中$P(\xi > \sqrt{n}c) = \alpha$.