

第四章、概率极限定理

§4.1 随机序列的收敛性

- 模型: $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. 样本/点: $\omega \in \Omega$.
- 随机变量序列,

$$\xi_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad \eta : \Omega \rightarrow \mathbb{R}.$$

- 一系列“可计算概率的”事件: 固定 $\varepsilon > 0$, 对任意 n ,

$$A_n = A_{n,\varepsilon} := \{|\xi_n - \eta| \geq \varepsilon\} = \{\omega : |\xi_n(\omega) - \eta(\omega)| \geq \varepsilon\}.$$

- 定义1.1. 若

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\xi_n - \eta| \geq \varepsilon) = 0, \quad \forall \varepsilon > 0,$$

则称 ξ_n 依概率收敛于 η , 记为 $\xi_n \xrightarrow{P} \eta$.

- 一个“无法计算概率的”事件:

$$A := \{ \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = \eta \} = \{ \omega : \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n(\omega) = \eta(\omega) \}.$$

- 定义1.2. 若

$$P \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = \eta \right) = 1$$

则称 ξ_n 几乎必然收敛于 η , 记为 $\xi_n \xrightarrow{\text{a.s.}} \eta$.

- 没有比较随机变量值的事件.
- 一系列“刻画分布(函数)的”事件:

$$\{\xi_n \leq x\}, \quad n = 1, 2, \dots.$$

- 定义1.3'. 若

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\xi_n \leq x) = \Phi(x), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

且 $\eta \sim N(0, 1)$, 则称 ξ_n 依分布收敛于 η , 记为 $\xi_n \xrightarrow{d} \eta$.

- 定义1.3. 若

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{\xi_n}(x) = F_{\eta}(x), \quad \forall x \in C(F_{\eta}),$$

则称 ξ_n 依分布收敛于 η , 记为 $\xi_n \xrightarrow{d} \eta$.

- 定理1.1. 若 $\xi_n \xrightarrow{\text{a.s.}} \eta$, 则 $\xi_n \xrightarrow{P} \eta$.
- 令 $A_n = \{|\xi_n - \eta| \geq \varepsilon\}$, 则(不加证明地接受)

$$\xi_n \xrightarrow{\text{a.s.}} \eta \quad \text{当且仅当} \quad P\left(\bigcup_{m=n}^{\infty} A_m\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad \forall \varepsilon > 0,$$

$$\xi_n \xrightarrow{P} \eta \quad \text{当且仅当} \quad P(A_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

- 例1.1 表明 $\xi_n \xrightarrow{P} \eta$ 不能推出 $\xi_n \xrightarrow{\text{a.s.}} \eta$.
- 定理1.2. 若 $\xi_n \xrightarrow{P} \eta$, 则 $\xi_n \xrightarrow{d} \eta$.
- 例1.2 表明 $\xi_n \xrightarrow{d} \eta$ 不能推出 $\xi_n \xrightarrow{P} \eta$.

- 假设 $X_1, X_2, \dots$ 是随机变量序列, 令

$$S_n = X_1 + \dots + X_n.$$

- 定义1.4. 若 $EX_n, n = 1, 2, \dots$ 都存在, 且

$$\frac{1}{n}(S_n - ES_n) \xrightarrow{P} 0,$$

则称 $X_1, X_2, \dots$ 服从(弱)大数律(Weak Law of Large Numbers, WLLN).

- 定义1.5. 若 $EX_n, n = 1, 2, \dots$ 都存在, 且

$$\frac{1}{n}(S_n - ES_n) \xrightarrow{\text{a.s.}} 0,$$

则称 $X_1, X_2, \dots$ 服从强大数律(SLLN).

- 定义1.6. 若 EX_n , $\text{var}(X_n)$, $n = 1, 2, \dots$ 都存在, $\text{var}(X_n)$ 不全为0, 且

$$S_n^* = \frac{S_n - ES_n}{\sqrt{\text{var}(S_n)}} \xrightarrow{d} Z \sim N(0, 1),$$

则称 $X_1, X_2, \dots$ 服从中心极限定理(Central Limit Theorem, CLT).

- 定义1.7. 若对任意 $n \geq 2$ 都有 $X_1, \dots, X_n$ 相互独立, 则称 $X_1, X_2, \dots$ 相互独立.
- 若 $X_1, X_2, \dots$ 相互独立, 且 $X_n \stackrel{d}{=} X_1, \forall n \geq 2$, 则称 $X_1, X_2, \dots$ 独立同分布, 记为 i.i.d. (independent and identically distributed).

§4.2 大数律和强大数律

定理 (Chebyshev's WLLN, 定理2.1)

假设 $X_1, X_2, \dots$ 相互独立, 且 $\text{var}(X_i) \leq M, \forall i$. 那么,

$$\frac{1}{n}(S_n - ES_n) \xrightarrow{P} 0.$$

- $\xi_n = \frac{1}{n}(S_n - ES_n), \quad \eta = 0.$
- 令 $A_n = \{|\frac{1}{n}(S_n - ES_n)| \geq \varepsilon\}$. 需验证 $P(A_n) \rightarrow 0$.
- 由切比雪夫不等式,

$$\begin{aligned} P(A_n) &= P(|S_n - ES_n| \geq n\varepsilon) \leq E \frac{(S_n - ES_n)^2}{(n\varepsilon)^2} \\ &= \frac{\text{var}(S_n)}{(n\varepsilon)^2} \leq \frac{nM}{n^2\varepsilon^2} = \frac{M}{\varepsilon^2} \cdot \frac{1}{n} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

- “相互独立”可减弱为“两两不相关”.

- 推论2.1. 设 $X_1, X_2, \dots$ 独立同分布, $\text{var}(X_1) < \infty$, 则

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} EX_1.$$

- 推论2.2. 单次试验中 A 发生的概率为 p , 则

n 次试验中 A 发生的频率 $\xrightarrow{P} p$.

- 例2.1. 设 $X_1, X_2, \dots$ 独立同分布, 密度为 $p(x) = \frac{1}{\pi(x^2+1)}$.
不加证明地接受: $\frac{S_n}{n}$ 与 X_1 有相同的密度. 于是,

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - a\right| > \varepsilon\right) = P(|X_1 - a| > \varepsilon) \text{ 不趋于0.}$$

定理 (Cantelli's SLLN, 定理2.2, 引理2.1)

假设 $X_1, X_2, \dots$ 相互独立, EX_i 存在, 且 $E(X_i - EX_i)^4 \leq M$, $\forall i$. 那么,

$$\frac{1}{n}(S_n - ES_n) \xrightarrow{\text{a.s.}} 0.$$

- 不妨设 $EX_i = 0$. 否则将 $X_i - EX_i$ 视为新的 X_i .
- 记 $A_m = \{|\frac{1}{m}S_m| \geq \varepsilon\}$. 则仅需验证 $P(\bigcup_{m=n}^{\infty} A_m) \rightarrow 0$.
- 次可列可加性:

$$P\left(\bigcup_{m=n}^{\infty} A_m\right) \leq \sum_{m=n}^{\infty} P(A_m).$$

- 4 阶“切比雪夫”不等式:

$$P(A_m) = P(S_m^4 \geq (m\varepsilon)^4) \leq \frac{1}{m^4\varepsilon^4} ES_m^4.$$

- 展开:

$$ES_m^4 = E \left(\sum_{i=1}^m X_i \right)^4 = \sum_{i,j,k,\ell=1}^m EX_i X_j X_k X_\ell.$$

- 同类项: r, s, t, u 互不相等,

$$EX_r^4, EX_r^3 X_s, EX_r^2 X_s^2, EX_r^2 X_s X_t, EX_r X_s X_t X_u.$$

- $EX_s = 0 \Rightarrow EX_r^3 X_s = EX_r^2 X_s X_t = EX_r X_s X_t X_u = 0.$

- $EX_r^4 \leq M$, 且

$$EX_r^2 X_s^2 = (EX_r^2) (EX_s^2) \leq \sqrt{EX_r^4} \sqrt{EX_s^4} \leq M.$$

- 于是,

$$ES_m^4 \leq mM + C_m^2 C_4^2 M \leq 3m^2 M.$$

$$\Rightarrow P(A_m) \leq \frac{3M}{\varepsilon^4} \times \frac{1}{m^2} \Rightarrow P \left(\bigcup_{m=n}^{\infty} A_m \right) \rightarrow 0.$$

- 推论2.3. 设 $X_1, X_2, \dots$ 独立同分布, EX_1^4 存在, 则 $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{a.s.}} EX_1$.
- 推论2.4. 单次小试验中事件 A 发生的概率为 p . 在独立重复试验中, 前 n 次试验中 A 发生的频率 $\xrightarrow{\text{a.s.}} p$.
- 定理2.4. (Kolmogorov's SLLN). 假设 $X_1, X_2, \dots$ 独立同分布, 期望存在, 则 $\frac{1}{n}S_n \xrightarrow{\text{a.s.}} EX_1$.
- 时间平均= 空间平均, (期望的含义).

应用(1): 统计方法的理论依据.

- 数据: $X_1, \dots, X_n$ 为 X 的 n 次独立观测值, 它们独立同分布.
- 估计期望:

$$\bar{X} := \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n) \xrightarrow{\text{a.s.}} EX.$$

- 估计方差:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - (\bar{X})^2 \xrightarrow{\text{a.s.}} EX^2 - (EX)^2 = \text{var}(X).$$

应用(2): 计算机模拟期望、概率.

- 例2.3. 设有 m 枚炮弹同时射击, 第 i 枚炮弹落点为 (x_i, y_i) ,

$$\varphi(x_1, y_1; \cdots; x_m, y_m) = \begin{cases} 1, & \text{若落点造成有效毁伤;} \\ 0, & \text{否则.} \end{cases}$$

- 设第 i 枚炮弹的瞄准点为 (a_i, b_i) , 实际落点 (X_i, Y_i) .

模型假设: $X_1, \cdots, X_m; Y_1, \cdots, Y_m$ 相互独立, 且

$$X_i \sim N(a_i, \sigma_1^2), \quad Y_i \sim N(b_i, \sigma_2^2).$$

- SLLN:

$$\begin{aligned} & P(\varphi(X_1, Y_1; \cdots; X_m, Y_m) = 1) \\ & \approx \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \varphi(X_1^{(k)}, Y_1^{(k)}; \cdots; X_m^{(k)}, Y_m^{(k)}). \end{aligned}$$

应用(3): 估计积分 $I = \int_a^b f(x)dx$.

- $I = \int_0^1 f(a + (b - a)u)(b - a)du$, 因此不妨假设 $a = 0, b = 1$.
- $I = \int_0^1 f(x) \cdot 1 dx = Ef(U)$.
- SLLN:

$$I \approx \frac{1}{n} (f(U_1) + \cdots + f(U_n)).$$

§4.3 中心极限定理

- 定理3.1(Linderberg-Levy CLT). 假设 $X_1, X_2, \dots$ 独立同分布, $0 < \text{var}(X_1) < \infty$. 那么,

$$S_n^* \xrightarrow{d} Z \sim N(0, 1).$$

- 应用:

$$P(S_n \leq x) = P(S_n^* \leq x^*) \approx \Phi(x^*) =: p,$$

其中,

$$x^* = \frac{x - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}. \quad (\mu = EX_1, \sigma^2 = \text{var}(X_1).)$$

例3.1. 加法器同时收到20 个噪声电压 V_k , $k = 1, \dots, 20$, 它们独立同分布, $V_1 \sim U(0, 10)$. 记 $V = \sum_{k=1}^{20} V_k$, 求 $P(V > 105)$.

- 此题已知 $n = 20$, $x = 105$, 求 p .
- $EV_1 = 5$, $\text{var}(V_1) = \frac{10^2}{12}$.
- 根据CLT,

$$P(V > 105) = P(V^* > x^*) \approx 1 - \Phi(x^*) =: p,$$

其中,

$$x^* = \frac{105 - 20 * 5}{\sqrt{20 * \frac{100}{12}}}.$$

- 计算得 $x^* \approx 0.387$. 查表得 $\Phi(x^*) = 0.652$, 从而所求之 $p = 1 - 0.652 = 0.348$.

例3.2. 旅馆有500间客房, 每间有一台2千瓦的空调. 入住率为80%. 问: 需多少千瓦的电力能有99% 的把握保证电力足够?

- 已知 n , p , 求 x . 假设提供 x 千瓦.
- $A_i =$ 第 i 间房开空调, $P(A_i) = 80\%$, $X_i = 2 \times 1_{A_i}$. $n = 500$.
- $EX_1 = 2 \times 0.8 = 1.6$, $\text{var}(X_1) = 2^2 \times 0.8 \times 0.2 = 0.64$.
- 要求 x 满足: $P(S_n \leq x) \geq 99\% = p$. 根据CLT, 要求

$$P(S_n^* \leq x^*) \approx \Phi(x^*) \geq 0.99,$$

其中

$$x^* = \frac{x - 500 \times 2 \times 0.8}{\sqrt{500 \times 2^2 \times 0.8 \times 0.2}}.$$

- 查表得 $\Phi(2.33) = 0.99$. 即, 要求 $x^* \geq 2.33$.

即, 要求 $x \geq 800 + 2.33 * \sqrt{320} = 841.68$, 从而需842 千瓦.

例3.3. 桥的强度 $Y \sim N(300, 40)$ (单位: 吨), 车的平均重量为5, 方差为2. 问: 为保证桥不出问题的概率不小于0.99997, 最多允许在桥上同时出现多少辆车?

- 已知 x , $p = 0.99997$, 求 n .

- 假设有 n 辆车在桥上, 第 i 辆的重量为 X_i .

模型假设 $X_1, \dots, X_n$ 独立同分布, 且与 Y 相互独立.

- 记 $S_n = X_1 + \dots + X_n$, 保证 $P(S_n \leq Y) \geq 0.99997$.

- 根据CLT 及独立性, 近似地,

$S_n - Y \sim N(5n - 300, 2n + 40)$. 因此, 令 $0^* = \frac{0 - (5n - 300)}{\sqrt{2n + 40}}$, 有

$$P(S_n \leq Y) = P(S_n - Y \leq 0) \approx \Phi(0^*).$$

- 要求 $\Phi(0^*) \geq 0.99997$, 查表得 $0^* \geq 4$, 即, $\frac{-(5n - 300)}{\sqrt{2n + 40}} \geq 4$, 解得 $n \leq 50.5$. 从而, 最多同时50 辆车.